MỘT CÁCH THIẾT LẬP HÀM GREEN CHO PHƯƠNG TRÌNH BLACK-SCHOLES

Trần Thế Anh
Khoa Sư phạm, Trường Đại học Khánh Hoà

Tóm tắt: *Bài viết này giới thiệu một cách thiết lập phương trình Black- Scholes và cách xây dựng hàm Green cho phương trình Black- Scholes trong một số điều kiện biên khác nhau. Phương trình Black - Scholes trong bài viết này được thiết lập từ việc xem xét một quá trình ngẫu nhiên trong tài chính là giá quyền chọn kiểu Châu Âu.*

Từ khoá: *cách thiết lập, hàm GREEN, phương trình BLACK-SCHOLES*

A METHOD FOR CONSTRUCTING THE GREEN'S FUNCTION FOR THE BLACK–SCHOLES EQUATION

Abstract: *This paper presents a method for formulating the Black–Scholes equation and constructing the Green's function for the Black–Scholes equation under various boundary conditions. The Black–Scholes equation considered in this study is derived by examining a stochastic process in finance, namely the pricing of European-style options. The proposed approach provides a mathematical framework for analyzing and solving the Black–Scholes equation through Green's function techniques.*

Keywords: *formulation method; Green's function; Black–Scholes equation; European option pricing; stochastic process.*

Nhận bài: 05/03/2026 *Phản biện: 06/05/2026* *Duyệt đăng: 14/05/2026*

I. GIỚI THIỆU

Phương pháp hàm Green là một phương pháp có nhiều ứng dụng để giải một số phương trình đạo hàm riêng. Ý tưởng chính của phương pháp là không giải trực tiếp phương trình mà tìm nghiệm của một phương trình khác tương ứng rồi biểu diễn nghiệm cần tìm thông qua nghiệm đó.

Mô hình Black- Scholes là mô hình áp dụng trong lĩnh vực tài chính được F. Black và M. Scholes đưa ra năm 1973 rên cơ sở phép tính ngẫu nhiên (stochastic calculus), sau đó R. C. Merton bổ sung và ứng dụng. Cũng vì vậy mà nhiều tài liệu gọi phương trình Black - Scholes là phương trình Black - Scholes - Merton. Ngoài việc định giá quyền chọn (option), các phái sinh tài chính như: hợp đồng kì hạn (forward contract), hợp đồng tương lai (futures contrac), hoán đổi (swap), .., mô hình Black - Scholes còn có thể ứng dụng trong một số lĩnh vực tài chính khác như: bảo hiểm rủi ro, định giá tài sản .... Nhờ sự áp dụng hiệu quả của mô hình Black - Scholes trong thị trường tài chính mà M. Scholes và R.C.Merton đã được trao giải Nobel kinh tế năm 1997 (khi đó F.Black đã mất).

Thiết lập hàm Green cho phương trình Black - Schloes là một cách tiếp cận phương trình Black -Schloes hiệu quả và có thể áp dụng giải quyết một số vấn đề trong kỹ thuật tài chính.

II. XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH BLACK-SCHLOES

2.1. Sơ lược về thị trường quyền chọn

Quyền chọn (option) là một loại chứng khoán phái sinh cho phép người sở hữu nó có quyền (nhưng không bắt buộc) được mua hay bán một tài sản (tài sản cơ sở) tại một mức giá xác định (strike price) vào một ngày xác định trong tương lai ngay tại thời điểm thỏa thuận hợp đồng .

Có 2 loại quyền chọn là quyền chọn mua và quyền chọn bán. Quyền chọn mua (call option) cho phép người sở hữu nó được quyền mua một tài sản vào một ngày xác định và tại một mức giá xác định. Quyền chọn bán (put option) cho phép người sở hữu nó được quyền bán một tài sản vào một ngày xác định và tại một mức giá xác định.

Quyền chọn, dù là quyền chọn mua hay quyền chọn bán, có hai kiểu quyền chọn: kiểu Châu Âu (European option - chỉ được thực hiện quyền vào ngày đáo hạn), hoặc quyền chọn kiểu Mỹ (American option - cho phép thực hiện quyền bất kỳ lúc nào trong kỳ hạn của quyền). Thời điểm xác định trong tương lai gọi là ngày đáo hạn (maturity/expiration day).

Thị trường quyền chọn được chính thức giao dịch tập trung vào năm 1973, khi thị trường giao dịch hàng hóa Chicago (Chicago Board of Trade) thành lập một bộ phận giao dịch quyền chọn (Chicago Board Option Exchange). Năm 1975, Sở giao dịch cổ phiếu Hoa Kỳ (American Stock Exchange), và Sở giao dịch cổ phiếu Philadelphia (Philadelphia Stock Exchange) bắt đầu giao dịch quyền chọn. Sở giao dịch Pacific (Pacific Exchange) cũng bắt đầu giao dịch quyền chọn vào năm 1976. Bước sang thập niên 1980, quyền chọn phát triển mạnh ở nhiều nước trên thế giới. Công cụ quyền chọn được mở rộng cho rất nhiều tài sản cơ sở.

2.2. Xây dựng phương trình Black- Scholes

Trong mục này chúng ta xây dựng phương trình Black- Scholes dựa trên một quá trình ngẫu nhiên là giá quyền chọn. Danh mục đầu tư có giá trị ban đầu là $X(0)$, tại thời điểm t có giá trị là $X(t)$. Giả sử tại thời điểm t chỉ đầu tư vào cổ phiếu $S(t)$ (tài sản cơ sở) và đầu tư vào thị trường tiền tệ để hưởng lãi suất cơ bản r (lãi suất phi rủi ro, lãi suất trái phiếu chính phủ).

Giá tài sản cơ sở của nhà đầu tư, $S(t)$, tuân theo chuyển động Brownian hình học

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

α, σ lần lượt là hệ số kéo theo (drift) và hệ số biến động (volatility).

Giả sử tại thời điểm T này, nhà đầu tư có cổ phiếu ($\Delta(t)$ thích nghi bộ lọc của chuyển động Brownian $W(t), t \geq 0$). Vi phân $dX(t)$ cho giá trị danh mục đầu tư tại thời điểm t có hai phần, phần thứ nhất là $\Delta(t)dS(t)$ là giá cổ phiếu, phần thứ hai là $r(X(t) - \Delta(t)S(t))$ là giá trị thu được từ lãi suất cơ bản. Do đó

$$dX(t) = \Delta(t)dS(t) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))dt = rX(t)dt + \Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)dW(t).$$

Chiết khấu giá cổ phiếu là $e^{-rt}S(t)$ và chiết khấu giá trị danh mục đầu tư là $e^{-rt}X(t)$.

Áp dụng công thức Itô - Doeblin cho hàm $f(t,x) = e^{-rt}x$ ta có:

$$d\left(e^{-rt}S(t)\right) = (\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \sigma e^{-rt}S(t)dW(t),$$

và $d\left(e^{-rt}X(t)\right) = \Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)dW(t) = \Delta(t)d\left(e^{-rt}S(t)\right).$

Xét một quyền chọn kiểu Châu Âu có giá là $(S(T) - K)^+$ tại thời điểm T, K là giá thực thi. Giá quyền chọn mua tại thời diểm t là $v(t,x)$ phụ thuộc vào giá tài sản cơ sở $S(t)$ ứng với $S(t) = x$. Khi đó $v(t,S(t))$ là một quá trình ngẫu nhiên. Tại thời điểm đầu chúng ta không biết giá của cổ phiếu trong tương lai $S(t)$ và do đó không biết được giá của quyền chọn mua $v(t,S(t))$ trong tương lai. Chúng ta cần tìm mối liên hệ quyền chọn mua trong tương lai và giá của cổ phiếu trong tương lai.

Sử dụng công thức Itô - Doeblin cho $v(t,S(t))$ ta có

$$d\left(v(t,S(t))\right) = \left[v_t(t,S(t)) + \alpha v_x(t,S(t))S(t) + \frac{1}{2}v_{xx}(t,S(t))\sigma^2 S^2(t)\right]dt + \sigma S(t)v_x(t,S(t))dW(t).$$

Vì vậy để tìm được giá quyền chọn mua ta cần tìm một hàm liên tục $v(t,x)$ là nghiệm của phương trình Black - Scholes

$$v_t(t,x) + rxv_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)v_{xx}(t,x) = rv(t,x), \forall t \in [0,T), x \geq 0,$$

Giá của quyền chọn là nghiệm của bài toán:

$$v_t(t,x)) + rxv_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)v_{xx}(t,x) = rv(t,x), \forall t \in [0,T), x \geq 0,$$

$$v(T,x) = (x - K)^+,$$

$$v(t,0) = 0, \forall t \in [0,T],$$

$$\lim_{x\to\infty}\{v(t,x) - (x - e^{-r(T-t)}K)\} = 0, \forall t \in [0,T].$$

2.3 Công thức Black- Scholes trong định giá quyền chọn

Theo mô hình Black – Scholes nghiệm của bài toán là công thức dùng để tính giá quyền chọn cổ phiếu (trong phần sau chúng ta sẽ dùng hàm Green để giải nghiệm bài toán này).

$$v(t,x) = xN\left(d_+(T-t,x)\right) - Ke^{-r(T-t)}N\left(d_-(T-t,x)\right), 0 \leq t < T, x > 0,$$

trong đó

$$d_\pm(T-t,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[ln\frac{x}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right]$$

và N là hàm tích lũy của phân phối chuẩn

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

III. XÂY DỰNG HÀM GREEN CHO PHƯƠNG TÌNH BLACK-SCHOLES

Xây dựng hàm Green cho phương trình Black-Scholes với các điều kiện biên bị chặn

$$v(S,T) = f(S), |v(0,t)| < \infty, |v(\infty,t)| < \infty$$

Trong phần này, để phù hợp với quy ước quen thuộc của lĩnh vực phương trình đạo hàm riêng, ta sẽ ký hiệu $v(S,t)$ thay cho ký hiệu $v(t,S)$ ở phần trước. Chúng ta sẽ xây dựng hàm Green cho phương trình Black- Scholes dạng

$$\frac{\partial v(S,t)}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 v(S,t)}{\partial S^2}+rS\frac{\partial v(S,t)}{\partial S}-rv(S,t)=0,$$

với điều kiện cuối và điều kiện biên là

$$v(S,T)=f(S)$$

$$|v(0,t)|<\infty \quad \text{và} \quad |v(\infty,t)|<\infty.$$

Trong đó S và t tương ứng là giá của tài sản cơ sở (cổ phiếu) tại thời điểm t và thỏa mãn điều kiện $0<S<\infty; T>t>-\infty$, $v=v(S,t)$ là giá của các sản phẩm phái sinh (quyền chọn), $ v = v (S, t) $ là một hàm khả vi trơn theo S và t. $f(S)$ là hàm biểu thị giá của sản phẩm phái sinh tại thời điểm đáo hạn T

Đặt $x=\ln S$, $\tau=\frac{\sigma^2}{2}(\text{T-t})$, $u(x,\tau)=v(S,t)$.

Thay vào phương trình, biến đổi ta có

$$\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}(\frac{2r}{\sigma^2}-1)-\frac{2r}{\sigma^2}u(x,\tau).$$

Đặt $c=2r/\sigma^2$, ta có

$$\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}+(c-1)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}-cu(x,\tau).$$

Từ điều kiện S,t thỏa mãn $0<S<\infty, -\infty<t<T$ suy ra x và τ trong \ eqref{e5} thỏa mãn $-\infty<x<\infty, 0<\tau<\infty$. Do đó bài toán tìm hàm Green cho phương trình đạo hàm riêng \eqref{e1}, với điều kiện cuối \eqref{e2} và điều kiện biên \eqref{e3} trở thành bài toán tìm hàm Green cho phương trình \eqref{e5} với điều kiện đầu và điều kiện biên là

$$u(x,0)=f(e^x),$$

$$|u(-\infty,\tau)|<\infty, \quad |u(\infty,\tau)|<\infty.$$

Áp dụng phép biến đổi Laplace cho phương trình ta có

$$sL\{u(x,\tau)\}-u(x,0)=\frac{\partial^2 L\{u(x,\tau)\}}{\partial x^2}+(c-1)\frac{\partial L\{u(x,\tau)\}}{\partial x}-cL\{u(x,\tau)\}.$$

Thay $u(x,0)=f(e^x)$ ta được phương trình

$$\frac{d^2U(x;s)}{dx^2}+(c-1)\frac{dU(x;s)}{dx}-(s+c)U(x;s)=-f(e^x).$$

Mặt khác từ suy ra

$$|U(-\infty;s)|<\infty, \quad |U(\infty;s)|<\infty.$$

Đặt

$$\alpha=\frac{1-c}{2}, \quad \beta=(\frac{1+c}{2})^2, \quad \omega=(s+\beta)^{1/2},$$

Nghiệm phương trình có dạng

$$U(x;s)=A(x;s)e^{(\alpha+\omega)x}+B(x;s)e^{(\alpha-\omega)x},$$

với $A(x,s), B(x,s)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{pmatrix} U_1(x,s) & U_2(x,s) \\ U_1'(x,s) & U_2'(x,s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A'(x;s) \\ B'(x;s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -f(e^x) \end{pmatrix}.$$

Trongđó $U_1(x;s)=e^{(\alpha+\omega)x}$ và $U_2(x;s)=e^{(\alpha-\omega)x}$.

Suy ra

$$A(x;s)=-\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{x}e^{-(\alpha+\omega)\xi}f(e^{\xi})d\xi+M(s), \backslash\backslash B(x;s)=\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{x}e^{-(\alpha-\omega)\xi}f(e^{\xi})d\xi+N(s),$$

với $M(s), N(s)$ là các hằng số theo x

Thay $A(x,s), B(x,s)$ ta có:

$$U(x;s)=\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{x}e^{\alpha(x-\xi)}\left[e^{\omega(\xi-x)}-e^{\omega(x-\xi)}\right]f(e^{\xi})d\xi+M(s)e^{(\alpha+\omega)x}+N(s)e^{(\alpha-\omega)x}.$$

Biến đổi dẫn đến

$$U(x;s)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha(x-\xi)}}{2\omega}e^{-\omega|x-\xi|}f(e^{\xi})d\xi.$$

Vì vậy hàm Green cho phương trình (1) thỏa các điều kiện (2), (3) là

$$G(S,t;S')=\frac{1}{S'[2\pi\sigma^2(T-t)]^{1/2}}e^{\alpha\ln(\frac{S}{S'})-\beta\frac{\sigma^2}{2}(T-t)-\frac{[\ln(\frac{S}{S'})]^2}{2\sigma^2(T-t)}}.$$

***Sử dụng hàm Green để giải nghiệm phương trình Black-Scholes**

Điều kiện cuối ta lấy $f(S)=(S-K)^+$, khi đó điều kiện cuối ià điều kiện trong bài toán.

Theo cách biễu diễn nghiệm của hàm Green ta có:

$$v(S,t)=\int_0^{\infty}G(S,t;S')f(S')$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-r(T-t)}}{S'[2\pi\sigma^2(T-t)]^{1/2}}e^{-\frac{\left[\ln(\frac{S}{S'})+(r-\sigma^2/2)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}(S'-K)^+dS'$$

$$=\int_K^{\infty}\frac{e^{-r(T-t)}}{[2\pi\sigma^2(T-t)]^{1/2}}e^{-\frac{[\ln(\frac{S}{S'})+(r-\sigma^2/2)(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}}dS'$$

$$-K\int_{K}^{\infty}\frac{e^{-r(T-t)}}{S'[2\pi\sigma^{2}(T-t)]^{1/2}}e^{-\frac{\left[\ln(\frac{S}{S'})+(r-\sigma^{2}/2)(T-t)\right]^{2}}{2\sigma^{2}(T-t)}}dS'.$$

Đ?t $u=\dfrac{\ln(\frac{S}{S'})+(r-\sigma^{2}/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$

Thay vào trong biểu thức của $v(S,t)$ và biến đổi ta có

$$v(S,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\ln(\frac{S}{K})+(r-\sigma^{2}/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}Se^{-\frac{(u+\sigma\sqrt{T-t})^{2}}{2}}du-K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\ln(\frac{S}{K})+(r-\sigma^{2}/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}e^{-r(T-t)}e^{-u^{2}}du.$$

Vậy

$$v(S,t)=SN\big(d_{+}(T-t,S)\big)-Ke^{-r(T-t)}N\big(d_{-}(T-t,S)\big).$$

Như vậy chúng ta có thể dùng hàm Green để tìm nghiệm của phương trình Balck –Scholes.

IV. KẾT LUẬN

Phương pháp tìm hàm Green trong bài viết này là một cách đi đến hàm Green cho phương trình Black-Scholes nhanh chóng. Những kỹ thuật đề xuất trong bài viết này này thu được hàm Green nhỏ gọn về mặt hình thức, điều này cho phép dễ dàng tiếp cận lý thuyết về hàm Green sử dụng giải quyết một số các vấn đề thực tế trong kỹ thuật về tài chính.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Đặng Đình Áng, Trần Lưu Cường, Huỳnh Bá Lân, Trần Văn Nhân, Phạm Hoàng Quân (2009), *Biến đổi tích phân,* NXB GD, Tp HCM.

Nguyễn Kim Đính (2003), *Phép biến đổi Laplace,* NXB ĐHQG, Tp HCM.

Trần Mạnh Hùng (2009), *Phương trình vi phân và đạo hàm riêng,* NXB ĐHSP, Hà Nội.

Trần Trọng Nguyên (2011), *Cơ sở toán tài chính,* NXB KHKT, Hà Nội.

Võ Văn Lai (2008), *"Mô hình định giá quyền chọn Black- Scholes và ứng dụng",* Tạp chí khoa học và ứng dụng, ĐH Tôn Đức Thắng (số 6/2008).

Trần Hùng Thao (2004), *Nhập môn toán tài chính,* NXB KHKT, Hà Nội.

Lê Thị Thanh (2010), *Phương pháp hàm Green cho một số bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng,* Luận văn Thạc Sỹ Toán học, ĐHSP Hà Nội.