

# RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC TRONG HÌNH HỌC PHẪNG

Trần Thị Ngọc Hương  
Trường THCS Vĩnh Kim, xã Vĩnh Kim, tỉnh Đồng Tháp

**Tóm tắt:** Bất đẳng thức hình học là một nội dung quan trọng nhưng khó đối với học sinh THCS, đặc biệt là học sinh lớp 9. Bài viết trình bày các phương pháp rèn luyện kỹ năng giải bài toán bất đẳng thức trong hình học phẳng thông qua việc hệ thống hóa kiến thức và phân loại các dạng bài tập. Các dạng được đề cập bao gồm: quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc; bất đẳng thức trong tam giác và quy tắc các điểm; bất đẳng thức trong đường tròn; và vận dụng các bất đẳng thức đại số. Kết quả thực nghiệm cho thấy sự tiến bộ rõ rệt của học sinh qua các năm học, tỉ lệ học sinh đạt điểm khá giỏi tăng từ 55,8% (năm 2022-2023) lên 77,1% (năm 2024-2025). Đề tài có khả năng ứng dụng rộng rãi trong công tác bồi dưỡng học sinh giỏi và nâng cao chất lượng dạy học môn Toán ở cấp THCS.

**Từ khóa:** Bất đẳng thức hình học; hình học phẳng; rèn luyện kỹ năng; THCS; bồi dưỡng học sinh giỏi.

## PRACTICING SKILLS IN SOLVING INEQUALITY PROBLEMS IN PLANE GEOMETRY

**Abstract:** Geometric inequalities are an important yet challenging topic for lower secondary school students, especially those in Grade 9. This paper presents methods for developing problem-solving skills in geometric inequalities in plane geometry through systematizing knowledge and classifying types of exercises. The categories discussed include: relationships between oblique and perpendicular segments; inequalities in triangles and point-based rules; inequalities in circles; and applications of algebraic inequalities. Experimental results show clear improvement in students' performance over the years, with the proportion of students achieving good and excellent grades increasing from 55.8% (academic year 2022–2023) to 77.1% (academic year 2024–2025). The study has broad applicability in training high-achieving students and improving the quality of mathematics teaching at the lower secondary level.

**Keywords:** Geometric inequalities; plane geometry; skill development; lower secondary education; gifted student training.

Nhận bài: 06/03/2026

Phản biện: 24/03/2026

Duyệt đăng: 27/03/2026

### I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hình học là phân môn có tính trừu tượng cao, đòi hỏi người học phải có tư duy logic chặt chẽ và khả năng suy luận sắc bén. Trong chương trình Toán THCS, các bài toán về bất đẳng thức hình học luôn được coi là một trong những dạng toán khó, thường xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi và tuyển sinh vào lớp 10 chuyên. Thực tế giảng dạy cho thấy nhiều học sinh còn lúng túng, thiếu định hướng khi gặp các bài toán dạng này, nguyên nhân chủ yếu là do các em chưa được hệ thống hóa kiến thức một cách bài bản và chưa có phương pháp tiếp cận phù hợp.

Xuất phát từ thực trạng đó, việc xây dựng một hệ thống lý thuyết và bài tập vận dụng theo các dạng cụ thể là hết sức cần thiết. Bài viết này trình bày nghiên cứu “Rèn luyện kỹ năng giải bài toán bất đẳng thức trong hình học phẳng” với mục tiêu giúp học sinh lớp 9 làm quen và giải quyết các bài toán bất đẳng thức hình học theo mức độ từ dễ đến khó, đồng thời phát triển tư duy sáng tạo và khả năng dự đoán cho học sinh.

### II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu được thực hiện dựa trên các phương pháp sau:

- Phương pháp phân tích tổng hợp lý thuyết:

Nghiên cứu các tài liệu về bất đẳng thức hình học, các công trình nghiên cứu liên quan để xây dựng cơ sở lý luận.

- Phương pháp thực nghiệm sư phạm: Áp dụng các nội dung đã xây dựng vào giảng dạy tại trường THCS Vĩnh Kim trong ba năm học (2022-2023 đến 2024-2025). Đối tượng thực nghiệm là học sinh lớp 9 của trường.

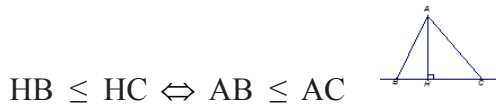
- Phương pháp quan sát và đánh giá: Theo dõi sự tiến bộ của học sinh thông qua các bài kiểm tra, khảo sát và đánh giá định kỳ.

Quy trình rèn luyện được thiết kế theo trình tự: giới thiệu kiến thức cơ bản → đưa bài tập vận dụng → phân tích, hướng dẫn → học sinh trình bày lời giải → giáo viên nhận xét, sửa chữa.

#### 2.1. Hệ thống kiến thức cơ bản và bài tập áp dụng

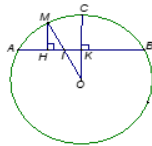
2.1.1. Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc, quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu

Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên; trong hai đường xiên kẻ từ một điểm đến một đường thẳng, đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn và đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.



Ví dụ: Cho (O;R), AB là dây cung ( $AB \neq 2R$ ), C là điểm chính giữa cung AB, M là điểm trên cung AB. OC cắt dây AB ở K. Vẽ  $MH \perp AB$ ,  $H \in AB$ . Chứng minh rằng:  $MH \leq CK$ .

Hướng dẫn học sinh vận dụng kiến thức:



- C là điểm chính giữa của  $\widehat{AB} \Leftrightarrow OC \perp AB$
- Gọi I là giao điểm của OM và AB. Sử dụng kiến thức quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên chứng minh  $MH \leq MI$ ;  $OK \leq OI$ . Mà  $OM = OC = R$

Suy ra:  $MH \leq MI = OM - OI \leq OC - OK = CK$ .  
 Vậy  $MH \leq CK$ . (Học sinh giải)

2.1.2. Các bất đẳng thức trong tam giác, quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác và quy tắc các điểm

- Tam giác ABC có:

\*  $|AB - AC| < BC < AB + AC$

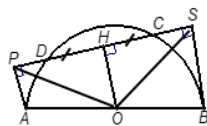
\*  $\sphericalangle ABC \leq \sphericalangle ACB \Leftrightarrow AC \leq AB$

- Xét n điểm  $A_1; A_2; \dots; A_n$  ta có:

$A_1A_n \leq A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \dots + A_{n-1}A_n$

- Tam giác  $\triangle ABC$  và  $\triangle A'B'C'$  có  $AB = A'B'; AC = A'C'$  thì:  $BC \leq B'C' \Leftrightarrow \sphericalangle A \leq \sphericalangle A'$

Ví dụ: Cho nửa đường tròn (O;R), đường kính AB và một dây cung CD. Vẽ AP và BS vuông góc với CD. Chứng minh rằng:  $OP = OS > R$ .



Hướng dẫn học sinh: Vẽ  $OH \perp DC$

- Chứng minh tứ giác APSB là hình thang.
- Chứng minh OH là đường trung trực của PS.

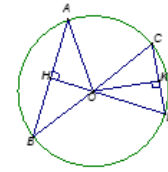
Sử dụng tính chất đường trung trực của đoạn thẳng suy ra:  $OP = OS$

-  $\sphericalangle PAB + \sphericalangle SBA = 180^\circ$  ( $AP \parallel BS$ ). Giả sử  $\sphericalangle PAB \geq 90^\circ$  hay  $\sphericalangle PAO \geq 90^\circ$

- Vận dụng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác PAO suy ra  $OP > OA$ , mà  $OA =$

$R$  nên  $OP = OS > R$ . (Học sinh trình bày lời giải, GV sửa)

2.1.3. Các bất đẳng thức trong đường tròn



- Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn.
- Trong một đường tròn hai dây bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.
- Trong hai dây cung không bằng nhau của một đường tròn dây cung nào lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn:  $AB \geq CD \Leftrightarrow OH \leq OK$
- Đối với hai cung nhỏ trong một đường tròn:
  - + Hai cung bằng nhau khi và chỉ khi dây căng hai cung bằng nhau
  - + Hai cung không bằng nhau, cung lớn hơn khi và chỉ khi

dây căng cung đó lớn hơn:  $\sphericalangle AOB \geq \sphericalangle COD \Leftrightarrow \widehat{AB} \geq \widehat{CD} \Leftrightarrow AB \geq CD$

Do đó:  $\sphericalangle AOB \geq \sphericalangle COD \Leftrightarrow \widehat{AB} \geq \widehat{CD} \Leftrightarrow AB \geq CD \Leftrightarrow OH \leq OK$

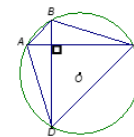
Ví dụ: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O;R) có  $\sphericalangle BAD$  là góc tù và  $AC \perp BD$

Chứng minh rằng:  $S_{ABCD} < 2R^2$ .

\*GV phân tích bài toán và gợi ý học sinh cần phải chứng minh:

$BD < 2R; AC \leq 2R;$

\*Bên cạnh đó, rèn luyện học sinh cách trình bày lời giải sao cho khoa học, logic: Trong (O;R) có góc BAD là góc tù



- $\Rightarrow BD$  là dây cung không đi qua tâm
- $\Rightarrow BD < 2R$  (đường kính là dây cung lớn nhất)
- Mặt khác, AC là dây cung bất kì của (O;R)
- $\Rightarrow AC \leq 2R$

Tứ giác ABCD có  $AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$

Do đó:  $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} < \frac{2R \cdot 2R}{2} = 2R^2$

2.1.4. Các bất đẳng thức đại số

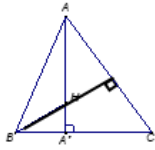
- Bất đẳng thức Côsi: Cho hai số không âm a, b

ta có:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu " $\geq$ " xảy ra khi  $a = b$ .

- Bất đẳng thức Bunhiacôpxki Sraxơ (B.C.S):  
Cho bốn số thực  $a, b, x, y$  ta có:  $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ . Dấu “=” xảy ra khi  $ay = bx$ .

Ví dụ: Cho  $\Delta ABC$  nhọn,  $AA'$  là đường cao,  $H$  là trực tâm.



Chứng minh rằng:  $A'A \cdot A'H \leq \frac{BC^2}{4}$

\*Gợi ý cho học sinh:

- Chứng minh:  $\Delta A'BH \sim \Delta A'AC$

$\Rightarrow A'A \cdot A'H = A'B \cdot A'C$

- Áp dụng BĐT Côsi với  $A'B$  và  $A'C$

### 2.2. Kết quả thực nghiệm

Sau 3 năm áp dụng đề tài, kết quả cho thấy tỉ lệ học sinh đạt loại khá, giỏi tăng dần qua các năm, từ 55,8% (năm 2022-2023) lên 77,1% (năm 2024-2025); đồng thời tỉ lệ học sinh yếu giảm đáng kể từ 9,3% xuống còn 2,9%.

Các kết quả đạt được cho thấy việc phân dạng bài tập một cách rõ ràng, có hệ thống đã giúp học sinh tiếp cận bài toán bất đẳng thức hình học một cách dễ dàng hơn. Phương pháp tiếp cận từ cơ bản đến nâng cao, từ kiến thức hình học thuần túy đến việc vận dụng các bất đẳng thức đại số đã phát huy hiệu quả trong quá trình giảng dạy.

So với các nghiên cứu trước đây về bất đẳng thức hình học, đề tài này có điểm mới là tập trung vào việc rèn luyện kỹ năng theo quy trình cụ thể, phù hợp với đối tượng học sinh THCS. Việc kết hợp giữa hình vẽ trực quan và suy luận logic đã giúp học sinh vượt qua rào cản tâm lý khi học hình học, tạo hứng thú và niềm tin vào khả năng giải quyết vấn đề của bản thân.

Tuy nhiên, đề tài vẫn còn một số hạn chế: các bài tập mới chỉ dừng lại ở mức độ vận dụng trực tiếp, chưa có nhiều bài tập mang tính thách thức cao dành cho đối tượng học sinh đặc biệt xuất sắc. Hướng phát triển tiếp theo có thể mở rộng sang các bất đẳng thức hình học nâng cao như bất đẳng thức Ptolemy, Erdos-Mordell và các dạng toán cực trị hình học phức tạp hơn.

### III. KẾT LUẬN

Nghiên cứu “Rèn luyện kỹ năng giải bài toán bất đẳng thức trong hình học phẳng” đã góp phần hệ thống hóa kiến thức và phương pháp giải cho học sinh lớp 9. Việc phân loại thành bốn dạng chính với các ví dụ minh họa cụ thể đã giúp học sinh dễ dàng nhận dạng và vận dụng. Kết quả thực nghiệm khẳng định tính hiệu quả của đề tài trong việc nâng cao chất lượng học tập môn Toán, đặc biệt là phân môn Hình học.

Đề tài có khả năng áp dụng rộng rãi trong các trường THCS, phục vụ công tác giảng dạy đại trà và bồi dưỡng học sinh giỏi. Giáo viên có thể vận dụng linh hoạt các nội dung để phù hợp với từng đối tượng học sinh cụ thể.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018)*, Hà Nội, Việt Nam, 2018.

P. Anh và N. Khánh, “Dạy học bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunhiacôpxki trong trường trung học phổ thông qua việc tìm kiếm các thể hiện của chúng trên mô hình hình học,” Trường Đại học Hà Tĩnh.

P. Anh và N. Khánh, “Dạy học bất đẳng thức Cauchy bằng phương pháp dạy học theo dự án,” *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ*, phần C: Khoa học Xã hội, Nhân văn và Giáo dục, số 29, pp. 52–59, 2013.