

# NGHIÊN CỨU VỀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐƯỜNG CONG HILBERT ỨNG DỤNG TRONG ĐƯỜNG BAY ỨNG CỨU NGẬP LỤT

Hoàng Thị Kiều Anh

Đại học Thủy Lợi

Email: hoangkieuanh@tlu.edu.vn

**Tóm tắt:** Trong công tác ứng cứu ngập lụt diện rộng, việc tối ưu hóa đường bay cho các thiết bị bay không người lái (UAV) đóng vai trò then chốt để thu thập thông tin và cứu trợ kịp thời. Bài báo này đề xuất ứng dụng đường cong điền đầy không gian Hilbert (Hilbert space-filling curve) vào việc thiết lập lộ trình bay. Dựa trên các tính chất toán học đặc thù như tính fractal, tính liên tục và khả năng bảo toàn tính cục bộ (locality preservation), mô hình đề xuất cho phép thực hiện các hoạt động bay đa cấp độ: từ khảo sát tổng quan đến tiếp cận chi tiết y tế. Phân tích cho thấy đường cong Hilbert ưu việt hơn các đường bay truyền thống trong việc phân loại vùng, linh hoạt lược bỏ các khu vực không cần thiết và hỗ trợ tốt cho việc triển khai đội hình nhiều UAV đồng thời.

**Từ khóa:** Hilbert curve, ứng cứu ngập lụt, fractal, space-filling curve

## EXPLORING HILBERT CURVE PROPERTIES IN THE CONTEXT OF FLOOD RESCUE MISSION PLANNING

**Abstract:** In large-scale flood emergency response, optimizing flight paths for Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) is pivotal for timely data acquisition and relief distribution. This paper proposes the application of the Hilbert space-filling curve for flight route construction. Leveraging its inherent mathematical properties—including fractality, continuity, and locality preservation—the proposed model enables multi-level flight operations, ranging from wide-area surveillance to high-precision medical interventions. Our analysis demonstrates that the Hilbert curve outperforms traditional flight patterns in region classification, offering superior flexibility in bypassing irrelevant areas and facilitating the coordinated deployment of multi-UAV swarms.

**Keywords:** Hilbert curve, flood rescue, fractal, space-filling curve.

Nhận bài: 14/03/2026

Phản biện: 12/04/2026

Duyệt đăng: 16/04/2026

### I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ngập lụt do lũ lụt nói riêng và biến đổi khí hậu nói chung là vấn đề lớn của nhiều nước trong những năm vừa qua, trong đó có Việt Nam. Những thiệt hại, đặc biệt về người, do ngập lụt rất lớn ngay từ lúc ngập lụt đến sau khi ngập lụt và trong đó vấn đề ứng cứu kịp thời sẽ giúp ích cho các trường hợp cần thiết sự giúp đỡ về y tế, lương thực. Do đó, việc ứng cứu khẩn cấp là một trong những hoạt động rất cần thiết và cần sự đóng sức của nhiều lực lượng, trong đó việc sử dụng đến bản đồ, hệ thống thông tin địa lý là điều tiên quyết. Công tác ứng phó để đảm bảo an toàn tính mạng và tài sản, đặc biệt, trong tương lai, dân số già hóa nên sự cần thiết của việc trợ giúp khi có những sự cố như ngập lụt càng nên được chuẩn hóa và tăng tính hiệu quả. Theo đó, ứng cứu khẩn cấp khi có ngập lụt gồm các hoạt động khẩn cấp để cứu hộ người dân (đặc biệt người già, trẻ em, những người khuyết tật, người bị bệnh nặng,...), di dời tài sản, cung cấp nhu yếu phẩm và các hoạt động về y tế như cấp cứu,... Cụ thể hơn, với các hoạt động ứng cứu trên được đáp ứng kịp thời, chúng cần được phân loại thành những nhóm hoạt động cần sự tổng quát hóa đúng để triển khai thực

hiện. Theo đó, thông thường để nắm bắt tình hình ảnh hưởng và tác động với người dân, ngoài các hệ thống thông tin địa lý có sẵn, việc sử dụng các thiết bị bay như UAV, drone để tiếp cận các vùng ngập cũng là một giải pháp cần thiết để triển khai trong những năm gần đây. Nếu chỉ có một thiết bị bay ở một độ cao xác định thì công tác đánh giá về ứng cứu sẽ phụ thuộc vào kinh nghiệm của người phân tích. Điều này sẽ gây khó khăn vì độ cao có thể cao hoặc thấp, liên quan đến mức chi tiết. Với việc bay nhiều lần cùng độ cao sẽ gây ra sự chậm trễ. Ngoài ra, nếu có nhiều thiết bị bay, việc lên kế hoạch bay sẽ quan trọng vì hạn chế sự trùng lặp và tìm kiếm giải pháp bay chung, như sắp xếp làm việc song song/đồng thời.

Từ đó, chúng ta cần thiết lựa chọn mô hình đường bay để phục vụ công tác ứng cứu hiệu quả. Một đường bay cần được phủ toàn diện vùng bị ngập và hơn nữa là yêu cầu về các tính chất tối ưu của đường bay để đảm bảo được việc nắm bắt thông tin vùng ngập tốt nhất. Trong bài viết này, đường cong Hilbert được đề cập và lựa chọn để phân tích vì các tính chất hình học trong việc phục vụ các lớp ứng dụng ứng cứu ngập lụt.

## II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

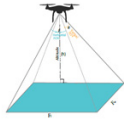
### 2.1. Cơ sở nghiên cứu

2.1.1. Một số tính chất trong cơ sở bay chụp không ảnh:

Theo lý thuyết, một footprint của thiết bị bay (như UAV): Khu vực diện tích được bay chụp tại 1 độ cao  $h$  của UAV gọi là tham số UAV footprint còn được gọi là vùng nhìn thấy (FoV). Công thức tính toán một vùng nhìn (FoV) của camera được xác định theo độ cao  $h$  và 1 góc nhìn, cụ thể là 2 tham số ( $F_w, F_l$ ) như sau:

$$F_w = 2h \times \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) \text{ và } F_l = 2h \times \tan \left( \frac{\beta}{2} \right)$$

Với:  $F_w$  là chiều rộng của FoV và  $F_l$  là chiều dài của FoV;  $h$  là độ cao bay;  $\alpha$  là góc ngang của camera và  $\beta$  là góc dọc của camera. Trong công thức này, giả định tầm nhìn của thiết bị bay là 1 hình chữ nhật (hoặc lý tưởng hơn là hình vuông):



Hình 1: Footprint (hình chụp nền) của một thiết bị bay

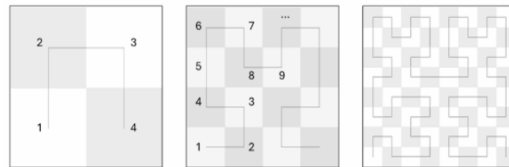
Từ đó, để một hình chụp nền rộng lớn hơn, một thiết bị bay cần độ cao khi bay hơn. Tuy nhiên, với

độ cao càng lớn, mức độ thu thập ảnh có thể kém chính xác hơn. Mỗi “ô” sẽ chứa đựng các thông tin được “chụp ảnh”. Ở các hệ thống bay chụp, các camera có thể tích hợp chụp các tầng số khác nhau. Mỗi tầng số sẽ thu thập một số thông tin cụ thể. Ngày nay, các ứng dụng về bay chụp rút trích nhiều thông tin trên địa hình bằng cách tổ hợp các tần số chụp như: thông tin về hồng ngoại, thông tin về cây xanh (chỉ số NVDI), các thông tin về môi trường,...

Cần lưu ý, trong lý thuyết về không ảnh, ngoài tham số footprint trên còn những thông số liên quan khác như độ phủ trùng lặp (overlap),... Độ phủ trùng lặp để các hình ảnh thu thập được đảm bảo ổn định về không gian, tuy nhiên, trong nghiên cứu này, độ phủ trùng lặp được bỏ qua.

### 2.1.2. Về đường cong Hilbert

Đường cong Hilbert là đường cong phủ không gian (space-filling curve) mang tính fractal được nhà toán học người Đức David Hilbert đề xuất năm 1891. Đường cong Hilbert theo các bậc 1, 2, 3,... trong không gian 2 chiều và có thể là những đường trong không gian 3 chiều.



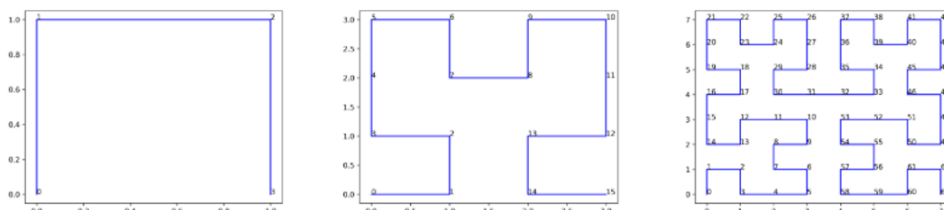
Hình 2: Đường cong Hilbert ở 3 cấp 1,2 và 3 trong lưới không gian 2 chiều

Ngoài tính chất chiều Hausdoff là 2 phản ánh việc lấp đầy hoàn toàn hình vuông giải tích đơn vị trong không gian 2 chiều. Đây là tính chất được xem như điều kiện cần đầu tiên để lựa chọn một đường cong. Bên cạnh đó, một số tính chất của đường cong Hilbert được chú ý bao gồm:

- Liên tục: đường cong liên tục (1 nét vẽ). Điều này sẽ giúp cho việc không bị chồng lặp vị trí khi di chuyển. Tính ưu việt của liên tục xem như điều kiện cần thứ 2 trong việc lựa chọn đường Hilbert.
- Bảo toàn tính cục bộ: khác với các phép ánh

xạ đơn giản hơn như đường cong bậc Z, đường cong Hilbert có xu hướng bảo toàn tính cục bộ, nghĩa là: các điểm gần nhau trong đường 1 chiều sẽ được ánh xạ gần nhau đến các điểm lân cận. Điều này có nghĩa là các điểm có số thứ tự gần nhau sẽ gần nhau trong không gian 2/3 chiều. Đây là tính chất quan trọng và được xem như điều kiện đủ để lựa chọn đường Hilbert vào tập các đường cong cần được khảo sát.

Dưới đây là một lộ trình đường Hilbert ứng với lưới 8x8 với các bậc 1,2 và 3 được thể hiện:



Hình 3: Đường cong Hilbert bậc 1,2 và 3 với vị trí trên lưới được đánh số [Pienaar (2024)]

Đường cong Hilbert có nhiều ứng dụng thực tế về lập lịch tính toán song song, đánh chỉ mục R-tree, sử dụng làm phép băm (hasing),..

Về xây dựng mã để sinh ra đường Hilbert được nhiều tài liệu đề cập. Các kỹ thuật thường được sử dụng là kỹ thuật đệ quy và các biểu diễn theo hệ thống L (L-system):

Kí tự: A, B

Các hoạt động: F, +, -

Bắt đầu: A

Quy luật phát sinh đường Hilbert:

A  $\rightarrow$  +BF-AFA-FB+

B  $\rightarrow$  -AF+BFB+FA-

Với kí hiệu F mang nghĩa “vẽ thẳng”, “+” mang nghĩa “rẽ trái 90 độ”, “-” mang nghĩa “rẽ phải 90 độ”, 2 kí hiệu “A” và “B” là bỏ qua trong khi vẽ.

Ở một phương pháp biểu diễn khác, đường cong Hilbert có thể xem là một dạng cây tứ phân (quadtree) với cấp đầu tiên là: 00, 01, 10 và 11. Sau đó, ở mỗi cấp sẽ gắn cấp trên vào phần “đuôi” để hình thành cấp mới. Cụ thể 4 ô ở cấp tiếp theo sẽ là 00 và 4 giá trị của cấp đầu tiên, đó là: 0000, 0001, 0010 và 0011. Và các ô kế tiếp sẽ là:

0100, 0101, 0110 và 0111

1000, 1001, 1010 và 1011

1100, 1101, 1110 và 1111

Từ đó, giả sử ở bước thứ k, ô tại vị trí N mang giá trị là  $H_k(N) = 10010101 \dots 1011$  thì ở bước thứ k+1, 4 ô mới mang kí hiệu  $n_0, n_1, n_2$  và  $n_3$  sẽ được sinh ra bằng việc “gắn” 4 giá trị 00, 01, 10 và 11 vào  $H_k(N)$ , nghĩa là:

$H_{(k+1)}(n_0) = H_k(N) \cdot "00"$

$H_{(k+1)}(n_1) = H_k(N) \cdot "01"$

$H_{(k+1)}(n_2) = H_k(N) \cdot "10"$

$H_{(k+1)}(n_3) = H_k(N) \cdot "11"$

Với cách xây dựng trên, đường cong Hilbert được ứng dụng thành cây (tree) để định danh vị trí địa lý trên toàn nước Mỹ theo nghiên cứu của Sinton (2018).

Do có nhiều tính chất quan trọng, nhiều thư viện tính toán của python đã xây dựng sẵn hàm thiết lập đường cong Hilbert. Trong đó, một số thư viện thường được đề cập trong các nghiên cứu về tính toán như numpy (numpy-hilbert-curve).

## 2.2. Đề xuất các cấp loại ứng cứu và lựa chọn đường bay

Trong bài báo này, các hoạt động cho ứng cứu được đề xuất phân thành nhiều cấp độ. Hiện tại, bài báo đề xuất 03 cấp độ tương ứng 3 mức ứng dụng. Theo đó, chúng ta có thể tạm thời phân loại các loại ứng cứu có thể tạm thời phân chia thành 3

cấp với tên tạm gọi là các cấp như sau:

*Cấp 1: với mục tiêu thu thập thông tin tổng quan: nắm được tình hình các khu vực ngập, các khu vực chưa bị ngập, tỉ lệ ngập và tác động;*

*Cấp 2: với mục tiêu tiếp cận liên lạc: xác nhận các vị trí cần ứng cứu và liên lạc thông qua và định rõ nguồn lực của các lân cận từ thông tin thu thập được;*

*Cấp 3: với mục tiêu tiếp cận đối tượng cụ thể: như phân phát hàng hóa, tiếp cận y tế;*

Theo đó, các dạng ứng dụng có thể phân chia thành các dạng: tỉ lệ nhỏ tương ứng với ảnh khu vực lớn, tỉ lệ lớn tương ứng với khu vực vừa và tỉ lệ siêu lớn tương ứng với chi tiết, phục vụ phân phát hàng hóa, thuốc men hoặc các hoạt động cần sự chính xác cao cứu trợ y tế như cấp cứu. Với phân chia như trên, cấp 1 được xem là cấp tổng quan nhất và cấp 3 là chi tiết nhất. Cấp 1 sẽ nắm bắt trên diện rộng để đánh giá chung, cấp 1 mang tính định tính nhiều hơn. Cấp 2 được xem là cấp trung gian và tăng cường định lượng. Cấp 2 cũng là phản ánh được bức tranh về phương pháp liên lạc cũng như bước đầu hình thành giải pháp tiếp cận, đặc biệt là tiếp cận của lân cận. Điều này cho thấy tầm quan trọng trong cứu hộ ngập lụt khi ở 1 vị trí có thể bị giới hạn cục bộ mà không có thông tin ở lân cận gần. Việc sử dụng tiếp cận cấp 2 sẽ nắm rõ hơn về nguồn lực cục bộ và các lân cận để cơ cấu những nguồn lực hỗ trợ khu vực ngập. Ở cấp 3, tiếp cận cụ thể sẽ giải quyết các bài toán về cứu trợ phân phối hàng cũng như tiếp cận y tế trực tiếp. Do vậy, tất cả các loại ứng dụng đều nên có sự liên thông và kế thừa thông tin. Điều này có nghĩa là ở cấp và cần được đảm bảo tính nhanh chóng, có khả năng “bỏ qua” (skip) những khu vực không cần thiết mà ở cấp trên

Từ đó, khi xét các đường cong phủ kín không gian được tài liệu nghiên cứu của Aymen Dia Eddine Berini và các cộng sự (2024) nhắc đến như đường chữ Z, đường bay đi-đến (back-and-forth), đường xoắn ốc (spiral), đường LMAT, đường Zamboni,... (như hình bên dưới), mặc dù không gian được phủ kín, các đường liên tục (liền nét) nhưng để xây dựng thành 3 cấp độ bay như yêu cầu bên trên thì gặp những trở ngại nhất định. Mặc dù việc xây nhiều cấp bay là khả thi, tương tự như phép chiếu hình chóp lên các cấp và đơn giản hóa (trong thuật ngữ gọi là tổng quát hóa) hoặc phức tạp hóa để được các cấp độ khác.



Hình 4: Các đường phủ không gian khác trong nghiên cứu của Berini và cộng sự

Tuy nhiên, theo nghiên cứu của Pienaar (2024), với tính chất độ đo không gian Hausdorff là 2 nên việc giữ tính cục bộ (locality) của đường Hilbert sẽ tăng tính nhóm các vùng. Vì vậy, khi sử dụng các đường bay khác với Hilbert, việc bay chụp đòi hỏi việc bay phủ không gian theo xu hướng toàn cục nên sẽ rất khó kiểm soát (loại bỏ/tăng cường) vùng cục bộ so với đường cong Hilbert. Từ đó, đề xuất các dạng đường bay theo các cấp Hilbert. Ngoài đặc điểm phủ kín vùng (region-filling), đường cong Hilbert có các ưu điểm (khả năng) như sau:

- Tính chất 1: Dễ dàng tổng quát hóa, nâng bậc các cấp;
- Tính chất 2: Cho phép bay đồng thời nhiều bậc: nhiều tỉ lệ khác nhau có thể bay đồng thời để phát hiện;
- Tính chất 3: Cho phép phân thành nhiều đường bay cùng cấp: khi có nhiều UAV, chúng ta có thể thực hiện việc bay thành nhiều đường bay trên 1 cấp của đường cong. Tính chất này cho phép việc bỏ qua các khu vực không cần thiết khi ảnh bay chụp ở cấp cao hơn nhận định khu vực không cần phải bay chi tiết hơn.

### III. KẾT LUẬN

Nghiên cứu đề xuất sơ bộ về đường bay đối với các khu vực ứng cứu, đặc biệt trong ứng cứu khẩn cấp. Theo đó, trong các hoạt động này, việc bay ở nhiều cấp độ mà đề xuất cụ thể ít nhất là 3 cấp độ nên cần đến đường cong Hilbert. Đường cong có thể đáp ứng tương ứng với mức độ chi tiết trong ứng cứu là “phủ đầy không gian” và “tính chất fractal”. Bên cạnh đó, đường cong còn đáp ứng vấn đề để “lược bỏ” (skip) các khu vực bay khi cần thiết để tăng tốc độ vì tính chất tuyến tính khá cao của đường cong.

Mở rộng ra, đường cong Hilbert phù hợp với các ứng dụng để “định danh” không gian với khả năng định danh nhiều cấp. Điều này sẽ hữu ích đối với các ứng dụng cần phân cấp từ Trung ương đến Tỉnh và cấp Xã.

Tuy vậy, đặc điểm có thể gọi là khuyết điểm của đường Hilbert trong áp dụng vào hành trình bay chụp là việc chuyển hướng khá nhiều. Việc chuyển hướng có thể mất đi nhiều thời gian trong thực tế vận hành thiết bị hoặc cần thiết bị bay có độ chính xác về hoạt động hoặc các tính năng làm “mềm” đường bay để tránh đường bay chuyển hướng quá “cứng”.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Andreas Westfeld, Space Filling Curves in Steganalysis.
- Aymen Dia Eddine Berini và cộng sự, “A new static path planning strategy for drones”, 2024.
- Seyed Abbas Sadat và cộng sự, Fractal Trajectories for Online Non-Uniform Aerial Coverage.
- J.K.Lawder, P.J.H.King, Querying Multi-dimensional Data Indexed Using the Hilbert Space-Filling Curve.
- Johannes J. Pienaar, Hilbert curves for efficient exploratory landscape analysis neighbourhood sampling, <https://arxiv.org/html/2408.00526v1>, 2024
- Antoine Sinton, Geospatial indexing on Hilbert curves, 2018, đường liên kết: <https://medium.com/@poudro/geospatial-indexing-on-hilbert-curves-2379b929adde>