TIẾP CẬN MỘT SỐ DẠNG TOÁN CỰC TRỊ TRONG SỐ PHỨC BẰNG VIỆC KHAI THÁC CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

Trần Hải Yến
Khoa GDĐC- NN- QPAN, Trường ĐHSPKT Vinh

Tóm tắt: *Các bài toán cực trị trong số phức thường được coi là khó đối với học sinh trung học phổ thông do kết hợp kiến thức đại số với hình học phức tạp. Tuy nhiên, bằng cách quy về và khai thác các bài toán cực trị quen thuộc trong hình học phẳng, ta có thể có những hướng tiếp cận trực quan, ngắn gọn và hiệu quả hơn. Bài báo này trình bày mối liên hệ giữa cực trị trong số phức và cực trị trong hình học phẳng, đưa ra một số phương pháp tiếp cận cùng ví dụ minh họa cụ thể, từ đó khẳng định vai trò quan trọng của hình học trong việc giải quyết các bài toán số phức.*

Từ khóa: *Số phức; cực trị; hình học phẳng; tiếp cận; tối ưu.*

APPROACHING SOME TYPES OF EXTREMUM PROBLEMS IN COMPLEX NUMBERS BY EXPLOITING EXTREMUM PROBLEMS IN PLANE GEOMETRY

Abstract: *Extremum problems in complex numbers are often considered difficult for high school students because they combine algebraic knowledge with complex geometric reasoning. However, by reducing them to and exploiting familiar extremum problems in plane geometry, it is possible to develop more intuitive, concise, and effective approaches. This article presents the relationship between extremum problems in complex numbers and those in plane geometry, proposes several approaches together with specific illustrative examples, and thereby confirms the important role of geometry in solving complex-number problems.*

Keywords: *complex numbers; extremum; plane geometry; approach; optimization.*

Nhận bài: 17/01/2026 *Phản biện: 24/02/2026* *Duyệt đăng: 27/02/2026*

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Số phức là một mảng kiến thức quan trọng, vừa mang tính đại số vừa gắn liền với hình học. Trong đó, các bài toán cực trị trong số phức (tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của môđun số phức, của các biểu thức liên quan đến số phức…) thường gây khó khăn cho học sinh. Nguyên nhân là do đa phần học sinh quen với việc tiếp cận các bài toán cực trị thuần túy bằng công cụ đại số, dẫn đến lời giải thiếu trực quan, đôi khi dài dòng và khó bao quát bản chất của vấn đề. Chính vì vậy, việc tiếp cận các dạng toán cực trị trong số phức thông qua các bài toán cực trị trong hình học phẳng không chỉ giúp học sinh có cái nhìn trực quan, dễ hiểu, mà còn góp phần phát triển năng lực liên hệ, tích hợp kiến thức giữa các mảng đại số và hình học. Điều này vừa nâng cao hiệu quả dạy học số phức, vừa khẳng định mối liên hệ chặt chẽ giữa các nhánh toán học trong việc giải quyết các vấn đề thực tiễn và lý thuyết.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Một số dạng toán cực trị trong số phức bằng việc khai thác các bài toán cực trị trong hình học phẳng

a. Kiến thức cơ bản về số phức

Số i được gọi là đơn vị ảo và có $i^2 = -1$

Dạng đại số của số phức z là $z = a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, a được gọi là phần thực của số phức z, còn b được gọi là phần ảo của số phức.

Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ được kí hiệu là $\overline{z}$ và $\overline{z} = a - bi$

Hai số phức bằng nhau: Cho

$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Các phép toán cộng, trừ, nhân trên hai số phức:

$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

$$z_1.z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

$kz_1 = ka_1 + kb_1 i$, với k là số thực.

Phép chia hai số phức:

$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ trong đó $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2.\overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}$$

b. Mô-đun số phức và một số mở rộng

Mô-đun số phức $z = a + bi$ kí hiệu là $|z|$, được xác định: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Mở rộng:

$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ $\qquad |z|=|\overline{z}|$

$\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$ $\qquad z.\overline{z}=|z|^2$

$\overline{z.w}=\overline{z}.\overline{w}$ $\qquad |z.w|=|z|.|w|$

$\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$ $\qquad \left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$

$(\overline{z})^n=\overline{(z^n)}$ $\qquad |z^n|=|z|^n$

c, Biểu diễn hình học của số phức và một số mở rộng

Biểu diễn hình học của số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ trên mặt phẳng tọa độ là điểm $M(x;y)$. Khi đó $|z|=OM$.

Biểu diễn hình học của hai số phức z và $\overline{z}$ là hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox nên nếu quỹ tích điểm biểu diễn hai số phức z và $\overline{z}$ lần lượt là các hình $(C),(C')$ thì hai hình đó cũng đối xứng nhau qua trục Ox .

Nếu điểm biểu diễn của hai số phức z_1,z_2 là A,B thì

$$\begin{cases}|z_1-z_2|=AB\\ |z_1+z_2|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=2OM\end{cases}$$

, với M là trung điểm đoạn AB .

Cho điểm biểu diễn của hai số phức z_1,z_2 là A,B. Số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_1|=|z-z_2|$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là trung trực của đoạn AB.

Cho điểm biểu diễn của hai số phức z_1,z_2 là A,B. Số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_1|=|\overline{z}-z_2|$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng.

Cho z_0 là một số phức không đổi có điểm biểu diễn là I , một số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_0|>R>0$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là miền ngoài đường tròn tâm I bán kính R .

Cho hai số phức z_1,z_2 không đổi có điểm biểu diễn là hai điểm A,B . Một số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_1|+|z-z_2|=a>0$. Khi đó:

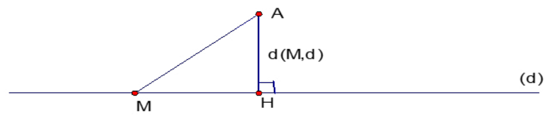
+) Nếu $|z_1-z_2|<a$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường E-lip nhận A,B làm hai tiêu điểm và độ dài trục lớn bằng a .

+) Nếu $|z_1-z_2|=a$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đoạn thẳng AB.

2.2. Khai thác từ các bài toán cực trị liên quan đến đường thẳng, đoạn thẳng

Bài toán 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm A và đường thẳng (d) . Tìm điểm M chạy trên đường thẳng (d) sao cho độ dài đoạn AM nhỏ nhất

a. Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d).

Khi đó $AM\ge AH$, nên độ dài đoạn AM nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d) và $AM_{\min}=AH=d(M,d)$.

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên

Tạo giả thiết: Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z sao cho quỹ tích nó là một đường thẳng.

Tạo kết luận: Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-z_0|$ với z_0 là một số phức đã biết.

Cách giải quyết: Gọi điểm biểu diễn của số phức z,z_0 lần lượt là M,A . Gọi đường thẳng biểu diễn quỹ tích số phức z là (d) . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

Nhận xét: Điểm mấu chốt để tạo ra một bài tập loại này là ta tạo ra được một điều kiện ràng buộc số phức để quỹ tích biểu diễn nó là đường thẳng. Điều kiện kiểu này khá đa dạng, mà hay gặp có thể kể đến:

+) Cho số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ sao cho $ax+by+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.

+) Cho số phức z thỏa mãn $|z-z_1|=|z-z_2|$ với z_1,z_2 là hai số phức đã biết.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ : Cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trên đường thẳng $(d):3x-4y-3=0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\dfrac{1}{5}$. B. $\dfrac{3}{5}$. C. $\dfrac{4}{5}$. D. $\dfrac{2}{5}$.

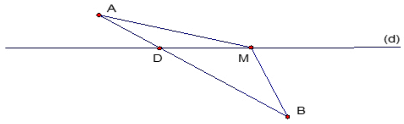
Gợi ý: Gọi M là điểm biểu diễn số phức z $\Rightarrow$

$$min|z|=OM_{\min}=d(O;d)=\frac{3}{5}$$

Bài toán 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm phân biệt A,B và đường thẳng (d). Điểm M chạy trên đường thẳng (d) sao cho tổng độ dài đoạn $AM + BM$ nhỏ nhất. Khi đó hãy tìm vị trí điểm M và tính $AM + BM$

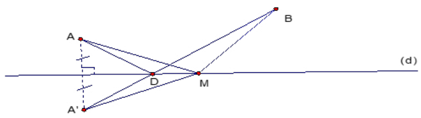
a. Hướng dẫn giải: Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: hai điểm A, B nằm về hai phía đối với đường thẳng (d)



Ta có $MA + MB \geq AB$ nên $(MA + MB)_{\min} = AB$, đạt được khi $M = AB \cap (d)$.

Trường hợp 2: hai điểm A, B cùng phía đối với đường thẳng (d)



Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng (d) . Khi đó $MA = MA'$

$\Rightarrow MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ nên

$(MA + MB)_{\min} = A'B$, khi $M = A'B \cap (d)$
.

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên

Tạo giả thiết: Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z sao cho quỹ tích nó là một đường thẳng.

Tạo kết luận: Tìm giá trị nhỏ nhất của mô-đun $|z - z_1| + |z - z_2|$ với z_1, z_2 là một số phức đã biết.

Cách giải quyết: Gọi điểm biểu diễn của số phức z, z_1, z_2 lần lượt là M, A, B . Gọi đường thẳng biểu diễn quỹ tích số phức z là (d) . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

Nhận xét: Điểm mấu chốt để tạo ra một bài tập loại này là phát hiện nhanh yếu tố hình học ở giả thiết và kết luận, vẽ các yếu tố hình học lên hệ trục tọa độ để xác định nhanh vị trí của A,B với đường thẳng (d)

c. Ví dụ minh họa:

Ví dụ: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z + 1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 - 4i| + |z - 4 - 6i|$ là:

A. $\sqrt{10} + \sqrt{5}$. B $\sqrt{13}$.. C. $2\sqrt{5}$ D $2\sqrt{10}$.

Gợi ý: Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , từ điều kiện $|z - 1| = |z + 1|$ suy ra được quỹ tích điểm M là trục Oy . Đặt $A(-2;4), B(4;6)$ thì A,B nằm về hai phía trục Oy . Khi đó

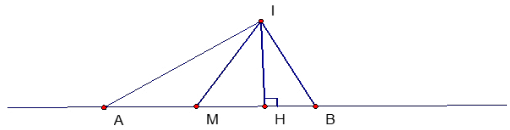
$|z + 2 - 4i| + |z - 4 - 6i| = MA + MB \geq AB = 2\sqrt{10}.$

Bài toán 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm I và đoạn thẳng AB . Điểm M chạy trên đoạn thẳng AB sao cho độ dài đoạn IM nhỏ nhất. Khi đó hãy tìm vị trí điểm và tính độ dài

a. Hướng dẫn giải

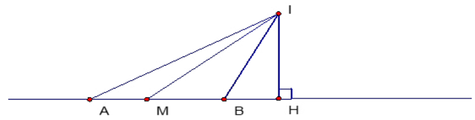
Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I lên đường thẳng (AB) .Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1 : Điểm H nằm trong đoạn AB



Dễ dàng thấy $IM_{\min} = IH$ và $IM_{\max} = \max\{IA; IB\}$.

Trường hợp 2 : điểm H nằm ngoài đoạn AB



Dễ dàng thấy $IM_{\min} = \min\{IA; IB\}$

và $IM_{\max} = \max\{IA; IB\}$.

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên

Tạo giả thiết: Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z sao cho quỹ tích nó là một đoạn thẳng.

Tạo kết luận: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của mô-đun $|z - z_0|$ với z_0 là một số phức đã biết.

Cách giải quyết: Gọi điểm biểu diễn của số phức z, z_0 lần lượt là M,I . Gọi đoạn thẳng biểu diễn quỹ tích số phức z là AB . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

Ví dụ : Xét số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

A. $\sqrt{13} + \sqrt{73}$. B. $\dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

C. $5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}$. D. $\dfrac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

Gợi ý: Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , gọi $A(-2;1), B(4;7)$.

+) Từ giả thiết

$|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB=AB$

$\Rightarrow$ Quỹ tích điểm M chính là đoạn thẳng AB .

Gọi $I(1;-1)$ thì $|z-1+i|=IM$.

+) Vẽ hình trực quan để kiểm tra hình chiếu của I lên đường thẳng AB nằm trong đoạn AB . Lại có:

$$IA=\sqrt{13}, IB=\sqrt{73}, d(I;AB)=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

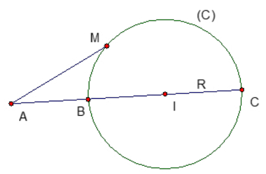
$$\Rightarrow P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$$

2.3. Khai thác từ các bài toán cực trị liên quan đến đường tròn

Bài toán 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A và đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Điểm M thay đổi trên đường tròn (C) . Xác định vị trí điểm để độ dài đoạn đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tính các giá trị này.

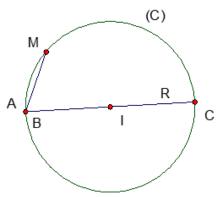
a. Hướng dẫn giải: Ta xét ba trường hợp

Trường hợp 1: Điểm A nằm ở miền ngoài đường tròn (C)



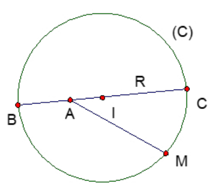
$AM_{\min}=AB=AI-R$ và $AM_{\max}=AC=AI+R$

Trường hợp 2: Điểm A nằm ở trên đường tròn (C)



$AM_{\min}=0$ và $AM_{\max}=AC=2R$

Trường hợp 3: Điểm A nằm ở miền trong đường tròn (C)



$AM_{\min}=AB=R-AI$ và $AM_{\max}=AC=AI+R$

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên

Tạo giả thiết: Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z sao cho quỹ tích nó là một đường tròn.

Tạo kết luận: Tìm giá trị nhỏ nhất của môđun $|z-z_0|$ với z_0 là một số phức đã biết.

Cách giải quyết: Gọi điểm biểu diễn của số phức z, z_0 lần lượt là A,M . Gọi đường tròn biểu diễn quỹ tích số phức z là (C) . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

Nhận xét: Điểm mấu chốt để tạo ra một bài tập loại này là ta tạo ra được một điều kiện ràng buộc số phức để quỹ tích biểu diễn nó là đường tròn. Điều kiện kiểu này khá đa dạng, mà hay gặp có thể kể đến:

+) Cho số phức z thỏa mãn $|z-z_0|=R$ với z_0 là hai số phức đã biết.

+) Cho số phức z thỏa mãn $|z-z_1|=k|z-z_2|$ với z_1, z_2 là hai số phức đã biết và $k>0$.

Ví dụ : Trong các số phức z thỏa mãn $|z-(2+4i)|=2$ gọi z_1 và z_2 là số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng :

A. $8i$. B. 4 . C. -8 . D. 8.

Gợi ý: Gọi M là điểm biểu diễn số phức z.

+) Vì $|z-(2+4i)|=2$ nên quỹ tích điểm M là đường tròn (C) tâm $I(2;4)$ bán kính R=2.

+) Phương trình đường thẳng OI là $y=2x$

+) Tọa độ hai điểm là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y=2x \\ (x-2)^2+(y-4)^2=2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 5x^2-20x+16=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x;y)=\left(2-\frac{2}{\sqrt{5}};4-\frac{4}{\sqrt{5}}\right) \text{hoặc} (x;y)=\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}};4+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

+) Số phức có môđun lớn nhất :

$$z=2+\frac{2}{\sqrt{5}}+\left(4+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)i \quad M\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}};4+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

+) Số phức có môđun nhỏ nhất :

$$z=2-\frac{2}{\sqrt{5}}+\left(4-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)i \quad N\left(2-\frac{2}{\sqrt{5}};4-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

+) Vậy tổng phần ảo của hai số phức là

$$4+\frac{4}{\sqrt{5}}+4-\frac{4}{\sqrt{5}}=8$$

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên

Tạo giả thiết: Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z_1 sao cho quỹ tích điểm biểu diễn nó là một đường tròn, tạo một điều kiện ràng buộc số phức z_2 sao cho quỹ tích điểm biểu diễn nó là một đường thẳng.

Tạo kết luận: Tìm giá trị nhỏ nhất của mô-đun $\left|z_1 - z_2\right|$.

Cách giải quyết: Gọi điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 lần lượt là M,N. Gọi đường tròn biểu diễn quỹ tích số phức z_1 là (C), đường thẳng biểu diễn số phức z_2 là (d). Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

Nhận xét: Khi học sinh đã nắm vững bài toán 1 và 3 thì cũng sẽ dễ dàng hình dung được con đường hình học để giải quyết bài toán này.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 9: Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn

$\begin{cases} |z_1 - i| = |z_1 + 1| \\ |z_2 - 1 - i| = 1 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1 - z_2\right|$.

A. $\sqrt{2}$. B. 1. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $\dfrac{1}{2}$.

Gợi ý: Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2.

+) Theo bài ra $\begin{cases} |z_1 - i| = |z_1 + 1| \\ |z_2 - 1 - i| = 1 \end{cases}$, suy ra quỹ tích điểm M là đường thẳng $(d): x + y = 0$ và quỹ tích điểm N là đường tròn (C) tâm $I(1;1)$ có bán kính R= 1.

+) Vẽ hình trực quan dễ thấy (C) và (d) không có điểm chung, mà $\left|z_1 - z_2\right| = MN$ nên

$$|z_1 - z_2|_{\min} = MN_{\min} = d(I, d) - R = \sqrt{2} - 1.$$

III. KẾT LUẬN

Có thể nhận thấy rằng việc tiếp cận các bài toán cực trị trong số phức bằng cách khai thác những bài toán cực trị quen thuộc trong hình học phẳng mang lại nhiều ưu thế. Cách tiếp cận này không chỉ giúp đơn giản hóa lời giải, tạo sự trực quan mà còn giúp học sinh nhận thấy mối liên hệ chặt chẽ giữa đại số và hình học. Việc quy đổi từ biểu thức số phức sang các yếu tố hình học như khoảng cách, đường trung trực, đường tròn, elip… đã giúp cho quá trình giải toán trở nên ngắn gọn, sáng sủa và dễ hiểu hơn, tạo hứng thú cho học sinh trong quá trình học tập.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Nguyễn Hữu Điển (2015), *Số phức và ứng dụng trong toán học phổ thông,* NXB Giáo dục Việt Nam.
Nguyễn Cảnh Toàn (2010), *Hình học giải tích phẳng,* NXB Giáo dục.
Lê Hồng Đức (2018), *Phương pháp giải toán cực trị hình học và số phức,* NXB Đại học Sư phạm.
Trần Văn Hạo (2019), *Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán THPT – Đại số và Giải tích*, NXB Giáo dục Việt Nam.
Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên) (2020), *SGK Toán 12 – Cơ bản và Nâng cao,* NXB Giáo dục Việt Nam.