

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN VÀO GIẢI QUYẾT CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

Trần Hải Yến

Khoa GDĐC, Trường ĐHSPKT Vinh

Tóm tắt: Toán học không chỉ là một môn khoa học trừu tượng mà còn là công cụ quan trọng giúp con người giải quyết nhiều vấn đề trong thực tiễn. Trong đó, tích phân là một trong những kiến thức cốt lõi của giải tích, có vai trò đặc biệt trong việc mô tả và tính toán các đại lượng biến thiên liên tục. Việc vận dụng tích phân để giải các bài toán thực tế như tính diện tích, thể tích, công cơ học, khối lượng vật thể,... không chỉ giúp học sinh hiểu sâu bản chất toán học mà còn góp phần rèn luyện tư duy ứng dụng, gắn kết kiến thức với đời sống và các lĩnh vực khoa học khác. Bài báo này nhằm trình bày một cách khái quát và hệ thống các ứng dụng tiêu biểu của tích phân trong việc giải quyết các bài toán thực tế.

Từ khóa: tích phân, ứng dụng giải quyết các bài toán thực tế

APPLICATIONS OF INTEGRALS IN SOLVING REAL-WORLD PROBLEMS

Tran Hai Yen

Faculty of General Education, Vinh University of Technology Education

Abstract: Mathematics is not only an abstract science but also an essential tool for solving various real-life problems. Among its core concepts, integrals play a vital role in calculus by describing and calculating continuously changing quantities. Applying integrals to real-world problems such as calculating area, volume, mechanical work, and the mass of objects—not only helps students deeply understand the mathematical essence but also fosters applied thinking and connects knowledge with daily life and other scientific disciplines. This paper aims to present a general and systematic overview of typical applications of integrals in solving real-world problems.

Keywords: integrals, applications, real-world problem-solving

Nhận bài: 15/03/2025

Phản biện: 15/04/2025

Duyệt đăng: 19/04/2025

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong cuộc sống và sản xuất hiện đại các lĩnh vực như vật lý, kỹ thuật, kinh tế học, sinh học, và thậm chí cả khoa học xã hội đều cần đến những công cụ toán học để phân tích và dự đoán. Một trong những công cụ mạnh mẽ và không thể thiếu trong kho tàng toán học chính là tích phân. Tích phân không chỉ đơn thuần là một khái niệm trừu tượng trong chương trình toán phổ thông hay đại học. Trên thực tế, nó được sử dụng rộng rãi để tính diện tích, thể tích, khối lượng, điện lượng, công cơ học, hay thậm chí xác suất trong các mô hình ngẫu nhiên. Tuy nhiên, học sinh cũng như sinh viên khi học Toán cảm thấy Toán học mang tính chất hàn lâm, vô bổ, xa rời thực tế. Nhiều học sinh, sinh viên không biết học các khái niệm Toán học để làm gì. Điều đó làm cho người học mất đi động cơ học tập. Do đó dạy học Toán cần làm cho người học hiểu được Toán học rất gần gũi, ở ngay xung quanh chúng ta, nó gắn liền với cuộc sống và cần rèn luyện cho học sinh năng lực vận dụng kiến thức Toán học vào thực tiễn. Vì những lý do trên, tác giả chọn đề tài: “Ứng dụng của tích phân vào giải quyết các bài toán thực tế”.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Chủ đề ứng dụng của tích phân là một trong những kiến thức cơ bản. Việc dạy và học vấn đề này giúp người học hiểu rõ ý nghĩa hình học của

tích phân. Đại đa số học sinh (kể cả học sinh khá giỏi) thường gặp những khó khăn, sai lầm sau:

- Nếu không có hình vẽ thì học sinh thường không hình dung được hình phẳng (hay vật thể tròn xoay). Do đó học sinh có cảm giác “xa lạ” hơn so với khi học về diện tích của hình phẳng đã học trước đây. Học sinh không tận dụng được kiểu “tư duy liên hệ cũ với mới” vốn có của mình khi nghiên cứu vấn đề này.

- Học sinh thường chỉ nhớ công thức tính thể tích vật tròn xoay một cách máy móc, khó phát huy tính linh hoạt sáng tạo, đặc biệt là kỹ năng đọc đồ thị để xét dấu các biểu thức, kỹ năng “chia nhỏ” hình phẳng để tính; kỹ năng cộng, trừ thể tích. Đây là một khó khăn rất lớn mà học sinh thường gặp phải.

Học sinh thường lúng túng trước một bài toán thực tế liên quan đến ứng dụng của tích phân, học sinh chưa hệ thống được kiến thức, không định được hướng giải quyết, vì thế tôi đã hệ thống một số dạng bài tập yêu cầu học sinh phải nắm vững và từ đó có thể giải được bài toán đã nêu.

Lúc này vai trò của người giáo viên là rất quan trọng, phải hướng dẫn chỉ rõ cho học sinh phương pháp giải từng dạng toán, nên giải như thế nào cho hợp lý đối với từng loại toán để được một bài toán đúng biến đổi đúng và suy luận có logic tránh

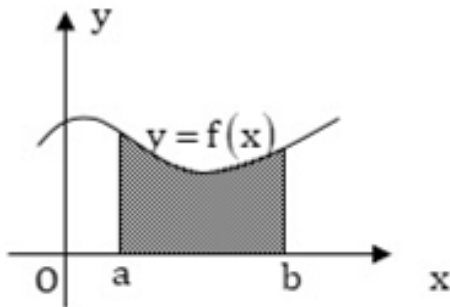
được các tình huống rườm rà phức tạp dễ mắc sai lầm. Trên cơ sở đó hình thành cho học sinh kỹ năng tốt khi giải quyết các bài toán thực tế.

2.1. Cơ sở lý thuyết

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó diện tích S của hình phẳng (D) giới hạn

bởi: Đồ thị hàm số $y = f(x)$; trục Ox ($y = 0$) và hai đường thẳng $x = a; x = b$ là:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

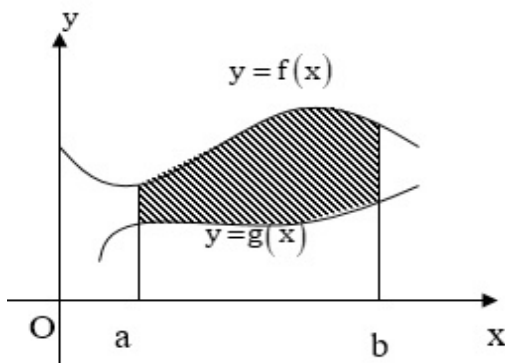


b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai

đồ thị $(C_1): y = f(x), (C_2): y = g(x)$

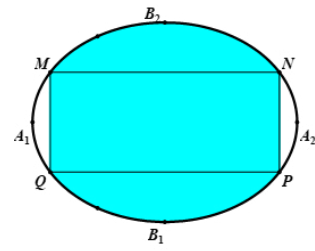
và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Được xác định bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



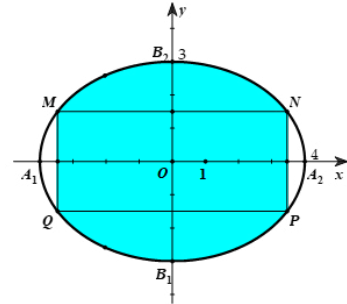
Bài tập vận dụng

Bài tập 1. Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 vnđ/m^2 và phần còn lại 100.000 vnđ/m^2 . Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8 \text{ m}$, $B_1B_2 = 6 \text{ m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3 \text{ m}$?



A. đồng. B. đồng C. đồng. D. đồng.

Lời giải



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Với } \begin{cases} A_1A_2 = 8 = 2a \\ B_1B_2 = 6 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}$$

Suy ra diện tích của hình elip là

$$S_{(E)} = \pi a.b = 12\pi \text{ (m}^2\text{)}$$

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật

$$\text{và } MQ = 3 \Rightarrow M\left(x; \frac{3}{2}\right) \in (E)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right); N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$$

Gọi $S_1; S_2$ lần lượt là diện tích phần bị tô màu và không bị tô màu

Ta có:

$$S_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2} dx = 3 \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2} dx \xrightarrow{x=4\sin t} S_2 = 4\pi - 6\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

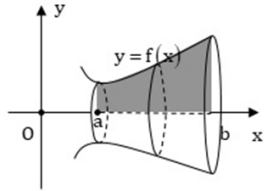
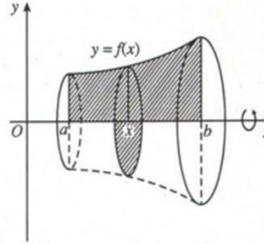
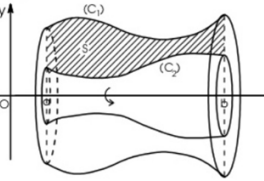
$$\text{Suy ra: } S_1 = S_{(E)} - S_2 = 8\pi + 6\sqrt{3}$$

Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$$T = (4\pi - 6\sqrt{3}) \cdot 100 + (8\pi + 6\sqrt{3}) \cdot 200 \approx 7.322.000 \text{ đồng}$$

2.2. Bài toán liên quan đến thể tích

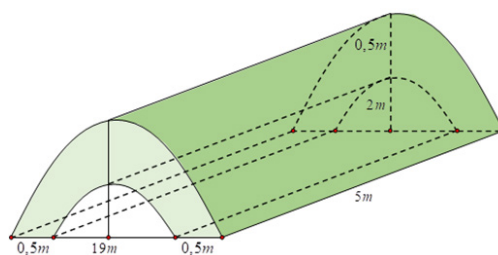
a. Cơ sở lý thuyết

a) Cắt một vật thể C bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Một mặt phẳng bất kì vuông góc với Ox tại điểm x ($a \leq x \leq b$) cắt C theo một thiết diện có diện tích $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó thể tích của vật thể C giới hạn bởi hai mp (P) và (Q) được tính theo công thức: $V = \int_a^b S(x) dx$.	
b) Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay miền D được giới hạn bởi các đường $y = f(x)$; $y = 0$; $x = a$; $x = b$ quanh trục Ox. Thiết diện của khối tròn xoay cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ bằng x là một hình tròn có bán kính $R = f(x)$ nên diện tích thiết diện bằng $S(x) = \pi R^2 = \pi f^2(x)$. Vậy thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức: $V = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$	
c) Nếu hình phẳng D được giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ (Với $f(x), g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$) thì thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay D quanh trục Ox được tính bởi công thức: $V = \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x) dx.$	

Bài tập vận dụng

Bài tập 2. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông

như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



A. $19m^3$.

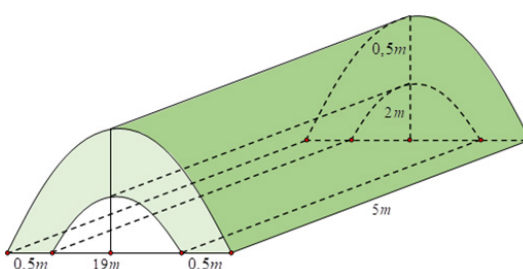
B. $21m^3$

C. $18m^3$.

D. $40m^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai

điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 0 = a_1 \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$$

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua

hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a_2 \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$$

Ta có thể tích của bê tông là:

$$V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) dx \right] = 40 \text{ m}^3$$

Chọn D

2.3. Ứng dụng của tích phân vào giải quyết bài toán chuyển động

a. Cơ sở lý thuyết

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì:

- Vận tốc của chuyển động: $v = f'(t)$.

- Gia tốc của chuyển động: $a = f''(t)$.

- Biết gia tốc thì vận tốc được tính: $v = \int a dt$

- Biết vận tốc thì quãng đường được tính: $s = \int v dt$

b. Bài toán cho biết hàm số của vận tốc, quãng đường của chuyển động

Bài tập 3. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s),

trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 15(m/s) B. 9 (m/s)

C. 42 (m/s)

D. 25 (m/s)

Lời giải

Ta có $v_B(t) = \int a dt = at + C$, $v_B(0) = 0 \Rightarrow C = 0$
Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A = \int_0^{25} \left(\frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t \right) dt = \left(\frac{1}{300}t^3 + \frac{13}{60}t^2 \right) \Big|_0^{25} = \frac{375}{2}$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B = \int_0^{15} at dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{15} = \frac{225a}{2}$$

$$\text{Ta có } \frac{375}{2} = \frac{225a}{2} \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}$$

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là

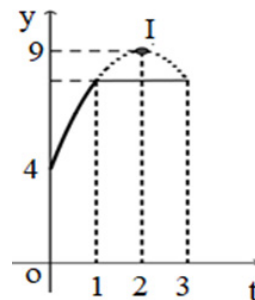
$$v_B(15) = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25 \text{ (m/s)}$$

Chọn D

2.4. Bài toán cho biết đồ thị của vận tốc, quãng đường của chuyển động

Bài tập 4. Một vật chuyển động trong 3 giờ với

vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó.



A. $s = 21,58$ (km) B. $s = 23,25$ (km)

C. $s = 13,83$ (km) D. $s = 15,50$ (km)

Lời giải

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau:

$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \text{ ta có } v = \frac{31}{4}$$

Vậy quãng đường vật chuyển động được là

$$s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \int_1^3 \frac{31}{4} dt = \frac{259}{12} \approx 21,583 \cdot$$

Chọn A

III. KẾT LUẬN

Tích phân là một công cụ toán học đóng vai trò trung tâm trong giải tích mà còn có giá trị ứng dụng sâu rộng trong nhiều lĩnh vực của đời sống và khoa học kỹ thuật. Qua việc giải quyết các bài toán thực tế như tính diện tích, thể tích, chuyển

động... tích phân giúp chúng ta mô hình hóa, phân tích và dự đoán các hiện tượng tự nhiên một cách chính xác và hiệu quả. Việc đưa các bài toán ứng dụng vào giảng dạy không những giúp học sinh hiểu rõ hơn về bản chất của tích phân mà còn phát triển tư duy thực hành, khả năng liên hệ và vận dụng kiến thức toán học vào thực tế. Do đó, tăng cường ứng dụng thực tiễn trong giảng dạy tích phân là một hướng đi cần thiết nhằm nâng cao chất lượng giáo dục và bồi dưỡng năng lực giải quyết vấn đề cho người học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Nguyễn Đình Trí (2008), Giải tích 1, NXB Giáo dục Việt Nam.
- [2]. Ngô Dư Đức (2006), Giáo trình Giải tích, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [3]. Phạm Văn Đước, Lê Văn Tiến (2005), Toán cao cấp – Giải tích hàm một biến, NXB Khoa học và Kỹ thuật.
- [4]. Đặng Đức Thụy (2016), Ứng dụng tích phân trong giải toán thực tế, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 479.
- [5]. Huỳnh Đỗ Nhật Nam (2017), Một số bài toán thực tế sử dụng tích phân trong chương trình phổ thông, Tạp chí Giáo dục, số 415.
- [6]. Stewart, J. (2015), Calculus – Early Transcendentals, 7th Edition, Cengage Learning.
- [7]. Sách giáo khoa Giải tích 12 – Nhà xuất bản giáo dục