

GIỚI THIỆU MỘT SỐ BÀI TẬP ỨNG DỤNG PHÂN PHỐI CHUẨN CỦA HỌC PHẦN XÁC SUẤT THỐNG KÊ CHO SINH VIÊN KỸ THUẬT ĐIỆN Ở TRƯỜNG ĐHSPT VINH

Lê Hồng Sơn, Lê Thị Huệ
Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vinh

Tóm tắt: Để nâng cao chất lượng giảng dạy Xác suất thống kê cho sinh viên kỹ thuật, việc giảng dạy lý thuyết phải đi đôi với ứng dụng thực tế hoặc giải quyết các vấn đề chuyên ngành. Bài viết giới thiệu một số bài tập về ứng dụng của phân phối chuẩn sẽ tạo cho sinh viên kỹ thuật điện nhiều cảm hứng và thấy được ý nghĩa của môn học.

Từ khóa: Xác suất thống kê; Bài tập; Phân phối chuẩn

INTRODUCING SOME EXERCISE APPLICATIONS OF THE NORMAL DISTRIBUTION IN THE PROBABILITY AND STATISTICS COURSE FOR ELECTRICAL ENGINEERING STUDENTS AT VINH UNIVERSITY OF TECHNOLOGY EDUCATION

Le Hong Son, Le Thi Hue
Vinh University of Technology Education

Abstract: To improve the quality of teaching Probability and Statistics for engineering students, theoretical instruction must be accompanied by practical applications or solutions to specialized problems. This paper introduces several exercises on the application of the normal distribution, aiming to inspire electrical engineering students and help them recognize the significance of the course.

Keywords: Probability and Statistics; Exercises; Normal Distribution

Nhận bài: 14/06/2025

Phản biện: 14/07/2025

Duyệt đăng: 18/07/2025

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phân phối chuẩn chiếm vị trí quan trọng trong lý thuyết xác suất thống kê, là quy luật phân phối xác suất được áp dụng rộng rãi trong thực tế. Trong nhiều lĩnh vực của khoa học và đời sống ta đều gặp các biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn: Trong thực tế nhiều biến ngẫu nhiên, nhiều quy luật tuân theo luật chuẩn hoặc gần chuẩn, chẳng hạn trọng lượng và chiều cao của người lớn, điểm thi của thí sinh, lực chịu đựng của một thanh sắt, các sai số đo đạc, sai số quan sát độ bền dẻo của máy móc,.....

Với thời lượng rất ít ở trên lớp, Giảng viên (GV) thường gặp khó khăn trong việc giúp sinh viên hiểu được ứng dụng của loại phân phối này (nói riêng) và của môn học XSTK (nói chung) khi tiếp cận môn học. Với những ví dụ và bài tập mang tính hàn lâm lý thuyết không có tính ứng dụng cũng phần nào làm giảm hứng thú khi tiếp cận môn học ở SV, SV băn khoăn tự hỏi “Học môn này, học phần này để làm gì?”. Hiểu được tâm lý đó, là một Gv trực tiếp giảng dạy cũng có nhiều trăn trở, suy nghĩ. Do vậy có những bài báo về bài tập ứng dụng là rất cần thiết đối với đối với người học cũng như người dạy!

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Một số kiến thức cơ bản về Phân phối chuẩn

$X \equiv N(\mu, \sigma^2)$
Hàm mật độ: $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$ với $-\infty < x < +\infty$

Đường cong mật độ này đối xứng qua đường $x = \mu$, nhận trục Ox làm tiệm cận ngang và có giá trị cực đại tại $x = \mu$ với tung độ cực đại là $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

Các số đặc trưng của X : Kỳ vọng $EX = \mu$; Phương sai $DX = \sigma^2$; Độ lệch chuẩn: σ

Trường hợp đặc biệt: $\xi \equiv N(0,1)$; Hàm mật độ của ξ là:

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ với $-\infty < x < +\infty$; đồ thị của hàm số đối xứng qua trục tung, có dạng hình chuông. Hàm phân phối của $\xi \equiv N(0,1)$ được kí hiệu là $\Phi(x)$ và ta có:

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$; ta đã có bảng giá trị của tích phân này ở các bảng phụ lục.

Chú ý: Ta có thể tính được các xác suất liên quan đến X bằng cách biến đổi nó liên quan đến

$\xi \cong N(0,1)$ rồi tra bảng, chẳng hạn

$$P(X < \alpha) = P\left(Z < \frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > \alpha) = 1 - P(X < \alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(\alpha < X < \beta) = P\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma} < \xi < \frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

Sự hội tụ của phân phối nhị thức về phân phối chuẩn

Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối nhị thức

$B(n; p)$. Ta đã biết $E(X) = np; D(X) = npq$.

Người ta chứng minh được rằng:

$$\text{Với } n > 5 \text{ và } \left| \frac{\sqrt{\frac{p}{1-p}} - \sqrt{\frac{1-p}{p}}}{\sqrt{n}} \right| < 0,3$$

thì biến ngẫu nhiên X có phân phối xấp xỉ

chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$, với $\mu = np; \sigma^2 = npq$.

Từ đó ta có công thức xác suất:

$$P(X = x) = P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$\text{Và } P(x \leq X \leq x+k) \cong \Phi\left(\frac{x+k - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

2.2. Ứng dụng phân phối chuẩn vào các bài toán kỹ thuật điện

Bài 1. Cách tìm quy luật phân phối.

Một thống kê về số giờ làm việc của 80 bóng đèn sợi tóc thể hiện trên Bảng 3.1.

Bảng 3.1. Dữ liệu về tuổi thọ bóng đèn

Tuổi thọ bóng đèn, giờ

854	1284	1001	911	1168	963	1279	1494	798	1599
1357	1090	1082	1494	1684	1281	590	960	1310	1571
1355	1502	1251	1666	778	1200	849	1454	919	1484
1550	628	1325	1073	1273	1710	1734	1928	1416	1465
1608	1367	1152	1393	1339	1026	1299	1242	1508	705
1199	1155	822	1448	1623	1084	1220	1650	1091	210
1058	1930	1365	1291	683	1399	1198	518	1199	2074
811	1137	1185	892	937	945	1215	905	1810	1265

Giải:

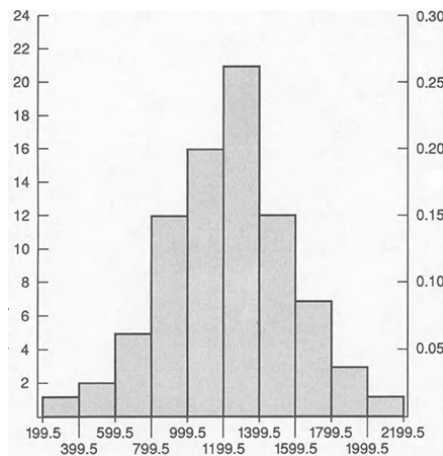
Giá trị trung bình được tính:

$$E(X) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 1228,6 \text{ (h)}$$

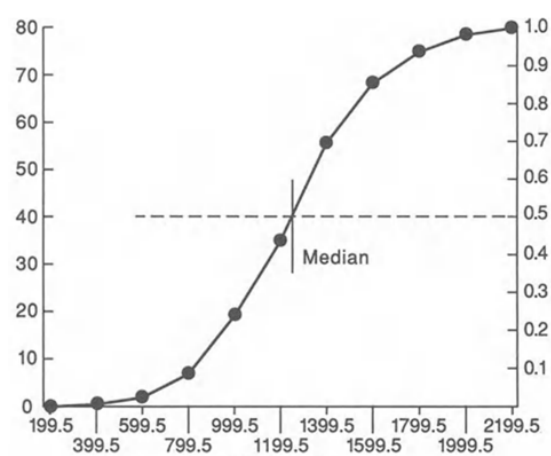
Phương sai: $\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 341,9^2 \text{ (h)}$

Bảng 3.2. Phân tích dữ liệu về tuổi thọ bóng đèn.

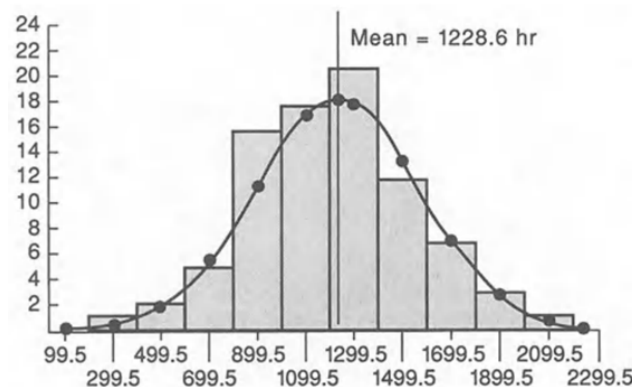
Cận dưới	Cận trên	Giữa	Số bóng đèn		Fi	Tích lũy
			Số bóng đèn, fi	Tần suất		Tần suất tương đối
199.5	399.5	299.5	1	0.0125	1	0.0125
399.5	599.5	499.5	2	0.0250	3	0.0375
599.5	799.5	699.5	5	0.0625	8	0.1000
799.5	999.5	899.5	12	0.1500	20	0.2500
999.5	1199.5	1099.5	16	0.2000	36	0.4500
1199.5	1399.5	1299.5	21	0.2625	57	0.7125
1399.5	1599.5	1499.5	12	0.1500	69	0.8625
1599.5	1799.5	1699.5	7	0.0875	76	0.9500
1799.5	1999.5	1899.5	3	0.0375	79	0.9875
1999.5	2199.5	2099.5	1	0.0125	80	1.0000
			<u>80</u>	<u>1.0000</u>		



Hình 1. Biểu đồ tần suất.



Hình 2. Biểu đồ tích lũy



Hình 3. Chuẩn hóa sơ đồ theo phân phối chuẩn

Như vậy, mô hình tuổi thọ của bóng đèn theo phân phối chuẩn như sau:

$$f(x) = \frac{1}{341,9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1228,6)^2}{2 \cdot 341,9^2}}$$

Trong các bài toán sau, mô hình theo phân phối chuẩn được giả định là đã được xây dựng, chỉ ứng dụng để tính các xác suất theo yêu cầu bài toán đặt ra.

Bài 2. Trong kiểm nghiệm dây cáp điện, dòng điện rò trên vỏ dây là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với dòng điện trung bình $\mu = 5$ (mA) và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 0,1$ (mA).

a. Tính tỷ lệ những dây cáp có dòng điện rò thử

nghiệm bé hơn 4,8 (mA)?

b. Tính tỷ lệ những dây cáp có dòng điện rò thử nghiệm lớn hơn 5,1 (mA)?

c. Tính tỷ lệ những dây cáp có dòng điện rò thử nghiệm từ 4,8 (mA) đến 5,1 (mA)?

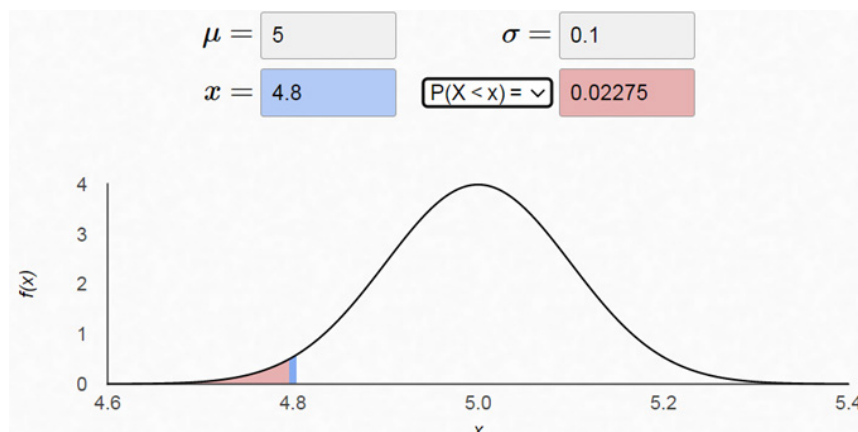
Giải:

Gọi X là dòng điện rò thử nghiệm của loại dây cáp này. Theo giả thiết thì

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ với } \mu = 5; \sigma = 0,1$$

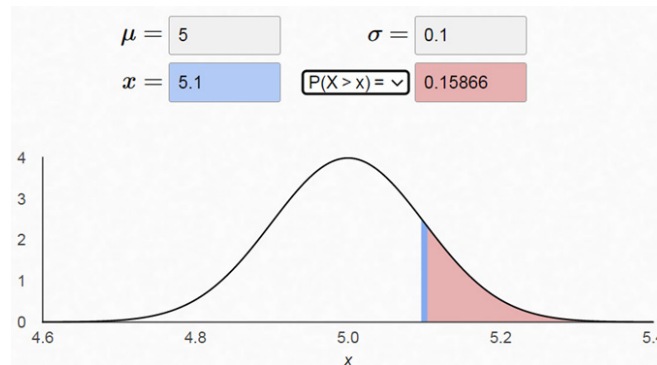
a. Tỷ lệ những dây cáp có dòng điện rò thử nghiệm bé hơn 4,8 (mA)

$$P(X < 4,8) = 0,5 - \Phi\left(\frac{4,8 - 5}{0,1}\right) = 0,5 - \Phi(-2) = 0,5 - 0,47725 = 0,02275$$

Hình 4. Tra cứu phân phối chuẩn $P(X < 4,8)$.

b. Tỷ lệ những dây cáp có dòng điện rò thử nghiệm lớn hơn 5,1 (mA)

$$P(X > 5,1) = 0,5 - \Phi\left(\frac{5,1-5}{0,1}\right) = 0,5 - \Phi(1) = 0,5 - 0,34134 = 0,15866$$



Hình 5. Tra cứu phân phối chuẩn $P(X > 5,1)$.

c. Tính tỷ lệ những dây cáp có dòng điện rò thử nghiệm từ 4,8 (mA) đến 5,1 (mA)?

Tỷ lệ dây cáp có dòng điện rò thử nghiệm từ 4,9 đến 5,2 mA chính là: $P(4,8 \leq X \leq 5,1)$

$$P(4,8 \leq X \leq 5,1) = \Phi\left(\frac{5,1-5}{0,1}\right) - \Phi\left(\frac{4,8-5}{0,1}\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-2) = 0,84134 - 0,02275 = 0,81859$$

Có thể sử dụng hàm NORMDIST trong Excel để tính xác suất trên thì:

$$P(4,8 \leq X \leq 5,1) = \text{NORMDIST}(5,1, 5, 0,1, 1) - \text{NORMDIST}(4,8, 5, 0,1, 1) = 0,818595$$

Tức tỷ lệ những dây cáp có dòng điện rò thử nghiệm từ 4,8 đến 5,1 (mA) là xấp xỉ 82%

Bài 3. Tuổi thọ của bóng đèn sợi đốt là một biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với thông số từ bài 3.3, số giờ làm việc trung bình là 1228,6h, độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 341,9$. Yêu cầu số giờ làm việc của bóng đèn bao nhiêu để lô hàng đạt tỷ lệ đáp ứng 98%?

Giải:

Gọi X là số giờ làm việc của bóng đèn. Theo giả thiết $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ với $\mu = 1228,6(\text{mm})$; $\sigma = 341,9$

a. Yêu cầu đề ra tìm số giờ làm việc của bóng đèn T để:

$$P(X \geq T) = 0,98 \text{ hay } 1 - P(X < T) = 0,98$$

$$P(X < T) = 0,02 = \Phi(-2,05) = \Phi\left(\frac{T - 1228,6}{341,9}\right)$$

Vậy: $T = 527,7$ h.

Trong Excel, sử dụng hàm NORMINV:

$$T = \text{NORMINV}(0,02, 1228,6, 341,9) = 526,4 \text{ h}$$

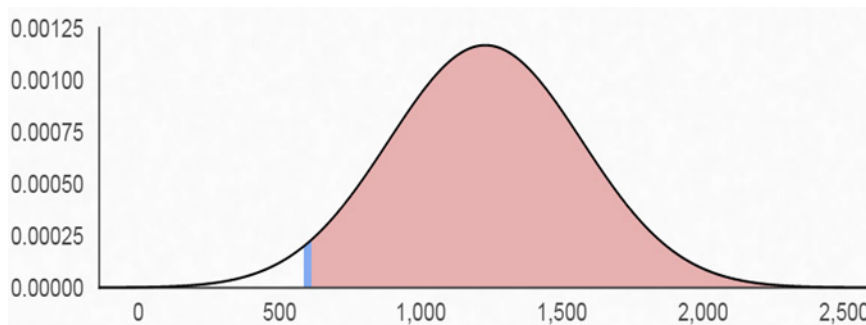
Tính trên Excel cho kết quả chính xác hơn tra bảng số.

Bài 4. Trong bài 3, biết rằng số giờ làm việc tiêu chuẩn là 600h, tính tỷ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn?

Giải:

Tỷ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn có giờ làm việc kỳ vọng lớn hơn 600h

$$P(X > 600) = 1 - P(X \leq 600) = 1 - 0,033 = 0,967$$



Hình 6. Tra cứu phân phối chuẩn $P(X > 600)$

2.3. Một số bài tập đề nghị

Bài tập 1: Gọi X (đơn vị: giờ) là tuổi thọ của một loại sản phẩm sản xuất hàng loạt;

$$\text{Giả sử } X \cong N(\mu = 1000; \sigma^2 = 100)$$

a) Nếu thời gian bảo hành là t , hãy tính tỷ lệ phải bảo hành p , tính với $t = 950$ giờ.

b) Nếu muốn tỷ lệ bảo hành là $t_0 = 0,01$ thì phải quy định thời gian bảo hành là bao nhiêu?

Bài tập 2: Tuổi thọ của một loại sản phẩm là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với tuổi thọ trung bình là 1000 (giờ) và độ lệch chuẩn là 10 (giờ). Một sản phẩm được bảo hành miễn phí nếu sản

phẩm hồng 983,55 (giờ). Tính tỷ lệ sản phẩm nhà cung cấp phải bảo hành miễn phí.

Bài tập 3: Gọi X là lượng điện (tính bằng kWh) mà mỗi hộ tiêu thụ hàng tháng. Giả sử X là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo quy luật chuẩn với lượng điện trung bình tiêu thụ của các hộ là 60 kWh và độ lệch chuẩn là 40 kWh. Giá tiền điện là 1500 đồng/kWh nếu dùng chưa đến 70 kW. Nếu dùng quá 70 kWh thì phải trả 3500 đồng cho mỗi kWh. Gọi Y là số tiền điện phải trả hàng tháng cho mỗi hộ gia đình (nghìn đồng). Hãy tính các khả năng sau:

a) Số tiền điện phải trả hàng tháng cho một hộ dân từ 100-150 nghìn đồng;

b) Số tiền điện phải trả hàng tháng cho một hộ dân từ trên 70 nghìn đồng;

c) Số tiền điện phải trả hàng tháng cho một hộ dân từ 40-150 nghìn đồng.

Bài tập 4: Việc tiêu thụ hàng tháng của các hộ gia đình ở Vinh là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn

với trung bình là 180 kWh với độ lệch chuẩn là 40 kWh. Tìm xác suất để chọn ngẫu nhiên một gia đình thì hộ đó:

a) Có mức tiêu dùng điện hàng tháng trên 300 kWh;

b) Có mức tiêu dùng điện hàng tháng dưới 200 kWh.

III. KẾT LUẬN

Việc tạo hứng thú học tập cho SV là rất quan trọng trong việc nâng cao chất lượng giảng dạy cũng như kết quả học tập và nghiên cứu của SV. Đối với những môn toán ứng dụng như XSTK thì những ví dụ những bài tập có tính thực tiễn liên quan đến chuyên ngành SV đang được đào tạo có ý nghĩa nhất định, thông qua đó SV thấy được sự cần thiết của môn học và khi đó SV có trách nhiệm, hứng thú hơn khi học những môn học này. Vì vậy thật sự rất cần phối hợp tìm hiểu những môn chuyên ngành đối với Giảng viên khi dạy các môn toán cơ sở có tính ứng dụng cao.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Tổng Đình Quỳ, *Giáo trình xác suất thống kê*, NXB Bách khoa Hà Nội, 2009.
2. Phạm Văn Chứng, Bùi Dương Hải, Trần Trọng Nguyên, *Giáo trình lý thuyết xác suất và thống kê toán*, NXB Giao thông vận tải, 2008.
3. Lê Khánh Luận, Nguyễn Thanh Sơn, Phạm Triis Cao, *Bài tập xác suất thống kê*, NXB Thống kê, 2008.
4. Nguyễn Thị Thu Hà, *Dạy học xác suất- thống kê theo hướng tăng cường vận dụng toán học vào thực tiễn cho sinh viên khối kinh tế, kỹ thuật*, Luận án tiến sỹ Giáo dục học, Trường Đại học sư phạm Hà Nội, 2014.