

RÈN LUYỆN KHẢ NĂNG ĐỊNH HƯỚNG VÀ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG LỐI GIẢI KHI LÀM BÀI TẬP TOÁN

Ngô Thị Huyền, Nguyễn Công Thắng
Email: huyenntta@gmail.com, thangkjng@gmail.com
Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vinh

Tóm tắt: Việc giải bài toán là một quá trình mò mẫm, tìm tòi dựa trên hiểu biết của người giải toán. Có người phải mò mẫm rất lâu, thử hết cách này cách khác mới giải được, trong khi có người lại tìm được cách giải rất nhanh. Vậy đâu là bí quyết cho khả năng giải toán nhanh và chính xác? Cách rèn luyện như thế nào? Bài báo này giới thiệu đến bạn đọc cách rèn luyện khả năng định hướng và xác định đường lối giải, một trong những phương pháp hiệu quả để tìm tòi lời giải thoả đáng, từ đó có thể nhìn bài toán dưới các khía cạnh, góc độ khác nhau.

Từ khoá: Định hướng, khái quát, phân biệt, hình thành, giải.

TRAIN THE ABILITY TO ORIENT AND DETERMINE THE WAY TO SOLUTION WHEN DOING MATH EXERCISES

Ngo Thi Huyen, Nguyen Cong Thang
Email: huyenntta@gmail.com, thangkjng@gmail.com
Vinh University of Technology and Education

Abstract: Solving a problem is a process of groping and searching based on the understanding of the solver. Some people have to search for a long time, trying many ways to solve it, while others find a solution very quickly. So what is the secret to solving problems quickly and accurately? How to practice? This article introduces to readers how to practice the ability to orient and determine the solution path, one of the effective methods to find a satisfactory solution, from which you can look at the problem from different aspects and angles.

Keywords: Orientation, generalization, distinction, formation, solution.

Nhận bài: 24/06/2025

Phản biện: 19/07/2025

Duyệt đăng: 22/07/2025

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Việc xác định đường lối giải một bài toán trước hết và chủ yếu là phải xác định đúng thể loại bài toán. Để làm tốt điều này cần nghiên cứu kĩ bài toán, căn cứ vào yêu cầu bài toán, giả thiết của bài toán. Các đường lối giải phần lớn dạng bài toán đã được xác định trong nội dung những tri thức về dạng toán đó mà người giải toán phải biết và phải nhớ. Tuy vậy, khó khăn thường gặp về mặt này là mỗi bài toán tuy nằm trong một thể loại nào đó nhưng lại phát sinh vấn đề riêng của nó. Vì thế, người giải toán phải nắm vững các đường lối chung, lại phải phát hiện đúng cái riêng của mỗi bài toán để chọn đường lối giải phù hợp nhất.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Bài toán minh hoạ và đường lối giải

Bài toán 1. Tìm mọi giá trị của tham số m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + x - 1 \geq 0 & (1) \\ mx^2 + 2mx + 1 < 0 & (2) \end{cases}$$

Nhận xét rằng bài toán đã cho thuộc bài toán tổng quát sau đây: Cho một hệ bất phương trình có chứa tham số. Hãy tìm mọi giá trị của tham số để hệ bất phương trình vô nghiệm.

• Đường lối giải bài toán tổng quát

Ta cần tìm mọi giá trị m để cho một trong các

bất phương trình của hệ vô nghiệm hoặc mọi bất phương trình của hệ đều có nghiệm nhưng chúng không có nghiệm chung. Ngoài ra ta có thể giải bài toán gián tiếp sau: Tìm tập hợp giá trị của m để hệ bất phương trình có nghiệm, sau đó kết luận tập hợp cần tìm là phần bù của tập hợp này trong $\mathbb{R}$. Cần phải cân nhắc và phân tích kĩ lưỡng để lựa chọn giải bài toán trực tiếp hay gián tiếp.

Trở lại bài toán 1, do bất phương trình (1) không chứa tham số nên ta xét trước.

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow x^2(x-1) + x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1 \quad (x^2+1 > 0 \quad \forall x)$$

Lúc này, bài toán trở thành: tìm mọi giá trị của tham số m để bất phương trình (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm thoả mãn $x < 1$.

Xét bất phương trình (2)

+ Khi $m = 0$: $(2) \Leftrightarrow 1 < 0$, không xảy ra, bất phương trình (2) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm.

Như vậy $m = 0$ là một giá trị cần tìm.

Gọi $f(x) = xm^2 + 2xm + 1$

+ Khi $m < 0$: Tam thức $f(x)$ có 2 nghiệm trái

dấu $x_1 < 0 < x_2$, và nghiệm của bất phương trình (2) là $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

Trường hợp này hệ có nghiệm vì hai miền $[1; +\infty)$ và $[x_2; +\infty)$ luôn có điểm chung.

Như vậy $m < 0$ không thỏa mãn bài toán.

+ Khi $m > 0$: Để tìm miền nghiệm của bất phương trình (2) ta phải xét dấu

$$\Delta' = m^2 - m = m(-1)$$

Nếu $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$ thì với mọi x , bất phương trình (2) vô nghiệm và do đó hệ vô nghiệm.

Như vậy $0 < m \leq 1$ thỏa mãn bài toán.

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$ (vì $m < 0$ ta đã xét ở trên) thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$, và nghiệm của bất phương trình (2) là $x_1 < x < x_2$.

Để hệ vô nghiệm thì $x_1 < x_2 \leq 1$. Muốn vậy phải có:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \geq 0 \\ \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 3m + 1 > 0 \\ -1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Tổng hợp lại ta được: hệ đã cho vô nghiệm khi $m \geq 0$.

Như vậy ở bài toán này ta dùng phương pháp giải trực tiếp.

Bài toán 2. Giải phương trình

$$\cos x \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 3x \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos 3x} - 1} = 1.$$

Để phương trình tồn tại, phải có điều kiện:

$$\begin{cases} 0 \leq \cos x \leq 1 \\ 0 \leq \cos 3x \leq 1 \end{cases}$$

Khi đó phương trình trở thành

$$\sqrt{\cos x - \cos^2 x} + \sqrt{\cos 3x - \cos^2 3x} = 1$$

Theo đường lối chung để giải phương trình vô tỉ, bằng cách bình phương 2 vế, ta sẽ được phương trình mới tương đương, nhưng chắc chắn sẽ phức tạp.

Để ý đến các biểu thức dưới dấu căn, chúng đều có dạng

$$u - u^2 \text{ với } 0 \leq u \leq 1$$

Ta đánh giá như sau

$$z = u - u^2 = -(u^2 - u) = \frac{1}{4} - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

đẳng thức xảy ra khi $u = \frac{1}{2}$.

Vì vậy, ta sẽ sử dụng đường lối thích hợp: đánh giá vế trái của phương trình, tìm các giá trị của x để vế trái có giá trị bằng 1.

Áp dụng kết quả trên ta có

$$\sqrt{\cos x - \cos^2 x} \leq \frac{1}{2}, \text{ đẳng thức xảy ra khi}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\cos 3x - \cos^2 3x} \leq \frac{1}{2}, \text{ đẳng thức xảy ra khi}$$

$$\cos 3x = \frac{1}{2}.$$

Từ đó

$$\sqrt{\cos x - \cos^2 x} + \sqrt{\cos 3x - \cos^2 3x} \leq 1,$$

$$\text{đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos 3x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Hệ (*) vô nghiệm vì khi $\cos x = \frac{1}{2}$ thì

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \neq \frac{1}{2}, \text{ tức}$$

là không có giá trị nào của x để vế trái bằng 1.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Trong việc xác định đường lối giải, cần chú ý đến khả năng sau: Có những bài toán xét về mặt hình thức thì khác nhau nhưng bản chất giống nhau, vì vậy đường lối giải tương tự nhau. Có thể xét các bài toán sau

Bài toán 3.

1. Cho phương trình

$$x^2 + kx + a = 0 \quad (3)$$

với a là hằng số khác 0 và k là tham số.

Tìm mọi giá trị của k để biểu thức

$$M = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 \leq 52$$

trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (3).

2. Cho phương trình bậc hai

$$(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0 \quad (4)$$

Tìm mọi giá trị của m để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình (4) thỏa mãn hệ thức

$$4(x_1 + x_2)^2 - 25x_1x_2 = 0.$$

3. Tìm mọi giá trị của a để hiệu các nghiệm của phương trình

$$2x^2 - (a+1)x - a + 3 = 0. \quad (5) \text{ bằng } 1.$$

4. Cho hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x^2 + \frac{3}{4}(\sin 2a)x + 1.$$

Gọi là hoành độ các điểm cực trị của hàm số y. Tìm mọi giá trị a thỏa mãn hệ thức sau

$$x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2. \quad (5a)$$

Nhận xét. Hiển nhiên đó là các bài toán khác nhau. Tuy vậy, nếu nghiên cứu kỹ, ta thấy các bài toán này có đặc điểm cơ bản giống nhau, đó là các bài toán chứa các đại lượng liên quan đến các nghiệm của một phương trình bậc hai. Do có đặc điểm cơ bản giống nhau nên đường lối giải các bài toán này cũng tương tự nhau. Cụ thể quy trình giải như sau

a) Tìm điều kiện để phương trình bậc hai có mặt trong bài toán có nghiệm.

b) Biểu diễn các đại lượng liên quan đến các nghiệm của phương trình bậc hai qua $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ từ đó, dùng định lý Vi – ét tính các đại lượng đã cho.

Sau đây là hướng dẫn giải bài toán 3.4.

Điều kiện để hàm số y có cực trị là phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có

$$y' = x^2 - (\sin a + \cos a)x + \frac{3}{4}\sin 2a$$

$$\Delta_{y'} = (\sin a + \cos a)^2 + 3\sin 2a = 1 - 2\sin 2a.$$

Để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin 2a > 0 \Leftrightarrow -1 \leq \sin 2a < \frac{1}{2}.$$

Khi đó ta biểu diễn điều kiện (5a) dưới dạng

$$x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

$$\text{trong đó } x_1 + x_2 = \sin a + \cos a, \quad x_1x_2 = \frac{3}{4}\sin 2a.$$

$$\text{Phương trình (5a) đưa về dạng}$$

$$\sin a + \cos a = (\sin a + \cos a)^2 - \frac{3}{4}\sin 2a$$

Đặt $u = \sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$, với điều kiện $-\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$, ta được phương trình đối với u:

$$u^2 + 2u - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = -3 \end{cases}.$$

Nghiệm $u = 1$ thỏa mãn điều kiện, từ đó trở về tìm a bằng cách giải phương trình:

$$\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = k2\pi \\ a = \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \text{ là các số nguyên}).$$

Trong việc xác định đường lối giải, người làm toán còn phải phân tích trong các bài toán đã cho các đặc điểm cơ bản, chung cho mọi bài toán và các đặc điểm phụ, riêng của từng bài toán. Từ đó thiết lập được quy trình để thực hiện đúng đường lối đã vạch ra. Sau đây là một số bài toán đề xuất để bạn đọc tự giải.

2.2. Bài tập đề xuất

Bài toán 4.

Cho x và y thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = a + 1 \\ x^2 + y^2 = 2a^2 - 2 \end{cases}.$$

Tìm mọi giá trị của a sao cho xy đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 5.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của của các hàm số sau

$$1. y = x^2 - x + 1.$$

$$2. y = \frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

$$3. y = \frac{\cos x + 2}{\sin x + \cos x - 2}.$$

III. KẾT LUẬN

Rèn luyện khả năng định hướng và xác định đường lối giải là một khâu không thể thiếu trong việc phát triển tư duy thông qua giải bài tập toán. Làm tốt việc này sẽ giảm thiểu được quá trình thử sai, có thể giải quyết được một lớp bài toán tương tự mà không mất nhiều thời gian. Công việc này có những khó khăn trước hết do người giải toán không nắm chắc các đặc điểm cơ bản để phân biệt các dạng toán. Lúc này, ngoài sự chăm chỉ, kiên nhẫn của người giải toán cũng như tài liệu, giáo trình thì vai trò của người thầy góp phần quan trọng giúp người học tối ưu hoá quy trình giải, bám sát mục tiêu ban đầu, đồng thời có thể vận dụng vào giải quyết các vấn đề trong cuộc sống.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Thái Hòa, (2001), Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán, Nxb Giáo dục.
- [2] Cung Thế Anh, Trần Văn Tấn, Đặng Hùng Thắng, (2024), Bài tập toán 12, Nxb Giáo dục Việt Nam.
- [3] Vũ Tuấn, (2007), Bài tập đại số và giải tích, Nxb Giáo dục.