

VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ĐI LÊN (BOTTOM-UP ANALYSIS) TRONG GIẢNG DẠY TOÁN CAO CẤP

Nguyễn Thị Kim Hiếu

Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Xây dựng Miền Tây

Email: nguyenthikimhieu@mtu.edu.vn

Tóm tắt: Phương pháp phân tích đi lên (Bottom-Up Analysis) là một cách tiếp cận giảng dạy trong đó sinh viên được dẫn dắt từ các ví dụ cụ thể, trực quan đến các khái niệm trừu tượng và tổng quát. Trong giảng dạy Toán cao cấp, đặc biệt tại các trường đại học kỹ thuật, phương pháp này giúp sinh viên phát triển tư duy logic, trực giác toán học và khả năng tự nghiên cứu. Bài báo này phân tích cách thức áp dụng phương pháp phân tích đi lên trong giảng dạy Toán cao cấp, đồng thời so sánh với phương pháp phân tích đi xuống (Top-Down Analysis) nhằm đánh giá hiệu quả của từng phương pháp. Kết quả cho thấy phương pháp phân tích đi lên giúp sinh viên hiểu sâu bản chất vấn đề nhưng đòi hỏi sự hướng dẫn chặt chẽ từ giảng viên để tránh làm chậm tiến trình tiếp thu kiến thức. Từ đó, bài báo đề xuất một mô hình kết hợp giữa hai phương pháp để tối ưu hóa việc giảng dạy Toán cao cấp trong môi trường đại học kỹ thuật.

Từ khóa: Phương pháp phân tích đi lên, phương pháp phân tích đi xuống, giảng dạy Toán cao cấp, tư duy toán học, phương pháp giảng dạy toán học.

APPLYING BOTTOM-UP ANALYSIS IN TEACHING ADVANCED MATHEMATICS

Nguyen Thi Kim Hieu

Faculty of Basic Sciences, Mien Tay Construction University

Email: nguyenthikimhieu@mtu.edu.vn

Abstract: The Bottom-Up Analysis is a pedagogical approach in which students are guided from specific, concrete examples to abstract and generalized concepts. In the teaching of Advanced Mathematics, particularly in technical universities, this method fosters logical reasoning, mathematical intuition, and self-directed learning. This paper examines the implementation of the Bottom-Up Analysis in teaching Advanced Mathematics and compares it with the Top-Down Analysis to assess the strengths and limitations of each approach. The findings indicate that while the Bottom-Up approach enhances deep conceptual understanding, it requires structured guidance from instructors to prevent delays in knowledge acquisition. Consequently, this study proposes a blended model that integrates both methods to optimize the teaching of Advanced Mathematics in higher education settings.

Keywords: Bottom-Up Analysis, Top-Down Analysis, Advanced Mathematics Education, Mathematical Thinking, Mathematics Teaching Methodology.

Nhận bài: 13/05/2025

Phản biện: 10/06/2025

Duyệt đăng: 13/06/2025

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Toán cao cấp là một học phần nền tảng trong chương trình đào tạo tại các trường đại học kỹ thuật, đóng vai trò quan trọng trong việc trang bị cho sinh viên những công cụ tư duy và phương pháp luận cần thiết để giải quyết các vấn đề kỹ thuật và công nghệ. Tuy nhiên, một thách thức lớn trong giảng dạy Toán cao cấp là giúp sinh viên không chỉ hiểu các khái niệm toán học trừu tượng mà còn có thể vận dụng chúng vào thực tiễn. Phương pháp giảng dạy có ảnh hưởng đáng kể đến khả năng tiếp thu và tư duy của sinh viên, đặc biệt là trong bối cảnh sinh viên kỹ thuật thường có xu hướng thiên về thực hành và ứng dụng hơn là lý thuyết thuần túy. Trong giảng dạy toán học, hai phương pháp tiếp cận phổ biến là phân tích đi lên (Bottom-Up Analysis) và phân tích đi xuống (Top-Down Analysis) [1,2]. Phương pháp phân tích đi xuống trình bày kiến thức từ các nguyên lý tổng quát, sau đó dần dần đi vào các trường hợp cụ thể. Ngược lại, phương pháp phân tích đi lên

bắt đầu từ các bài toán cụ thể, các ví dụ trực quan, rồi mới dần khái quát hóa thành lý thuyết tổng quát. Trong môi trường đại học kỹ thuật, nơi mà việc liên kết giữa toán học và các ứng dụng thực tiễn là vô cùng quan trọng, việc áp dụng phương pháp phân tích đi lên có thể giúp sinh viên xây dựng nền tảng tư duy toán học vững chắc, tăng cường khả năng suy luận logic, trực giác toán học và tư duy sáng tạo. Nghiên cứu này nhằm làm rõ ứng dụng của phương pháp phân tích đi lên trong giảng dạy Toán cao cấp, đồng thời so sánh với phương pháp phân tích đi xuống để đánh giá ưu, nhược điểm của từng phương pháp, từ đó đề xuất hướng kết hợp nhằm tối ưu hóa hiệu quả giảng dạy toán học trong môi trường đại học kỹ thuật.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Tổng quan về phương pháp phân tích đi lên (Bottom-Up Analysis).

Phương pháp phân tích đi lên (Bottom-Up Analysis) là một cách tiếp cận trong giảng dạy,

trong đó kiến thức được xây dựng dần dần từ các nguyên lý cơ bản, bài toán cụ thể và tình huống thực tiễn trước khi đi đến các khái niệm tổng quát. Cách tiếp cận này dựa trên cơ sở tâm lý học nhận thức, trong đó quá trình học tập được xem như một quá trình tích lũy và tổ chức dần dần các mảnh ghép kiến thức để hình thành một bức tranh tổng thể.

Trong giáo dục đại học, đặc biệt là trong giảng dạy Toán cao cấp tại các trường kỹ thuật, phương pháp này có thể giúp sinh viên tiếp cận những khái niệm trừu tượng thông qua các ví dụ thực tế, qua đó hình thành tư duy toán học một cách tự nhiên và sâu sắc hơn. Một số nghiên cứu trong lĩnh vực khoa học giáo dục cũng chỉ ra rằng phương pháp này giúp sinh viên tăng cường khả năng tự nghiên cứu, phát triển tư duy logic và nâng cao sự hứng thú đối với môn học [3,4].

2.2. Ứng dụng phương pháp phân tích đi lên trong việc xây dựng tư duy toán học cho sinh viên

Trong bối cảnh giáo dục đại học kỹ thuật, tư duy toán học không chỉ dừng lại ở việc hiểu các định lý hay công thức mà còn bao gồm khả năng phân tích vấn đề, tư duy logic và kỹ năng tự nghiên cứu. Phương pháp phân tích đi lên đóng vai trò quan trọng trong việc phát triển những khía cạnh này thông qua cách tiếp cận từ thực tế đến lý thuyết. Khi giảng dạy Toán cao cấp theo phương pháp này, giảng viên có thể bắt đầu từ các bài toán cụ thể, chẳng hạn như một bài toán thực tế trong kỹ thuật xây dựng, cơ học hoặc điện tử, sau đó dẫn dắt sinh viên đi đến việc phát biểu các định lý và khái niệm tổng quát. Quá trình này không chỉ giúp sinh viên hiểu rõ bản chất toán học mà còn rèn luyện khả năng trừu tượng hóa, một kỹ năng cốt lõi trong lĩnh vực khoa học và công nghệ.

Một minh chứng rõ nét cho hiệu quả của phương pháp này là trong việc giảng dạy các môn như Đại số tuyến tính hay Giải tích. Thay vì ngay lập tức trình bày định nghĩa không gian vector hay đạo hàm, giảng viên có thể đưa ra những bài toán thực tế liên quan đến tối ưu hóa trong kỹ thuật hoặc mô hình hóa trong vật lý, từ đó sinh viên dần dần tiếp cận các khái niệm trừu tượng một cách tự nhiên hơn. Điều này không chỉ giúp nâng cao khả năng tiếp thu mà còn làm giảm khoảng cách giữa lý thuyết toán học và ứng dụng thực tế, giúp sinh viên thấy được giá trị của môn học.

Phương pháp phân tích đi lên không chỉ là một công cụ hữu hiệu giúp sinh viên tiếp cận kiến thức một cách tự nhiên, mà còn góp phần quan trọng trong việc phát triển tư duy phản biện và kỹ năng

tự nghiên cứu. Bằng cách khuyến khích sinh viên khám phá các quy luật toán học từ những bài toán cụ thể, giảng viên giúp họ xây dựng thói quen tự đặt câu hỏi và chủ động tìm tòi kiến thức mới. Điều này không chỉ giúp sinh viên nhớ lâu hơn mà còn rèn luyện khả năng vận dụng kiến thức vào thực tế một cách sáng tạo và linh hoạt. Thông qua việc tự mình tìm ra các quy luật, sinh viên không chỉ củng cố tư duy logic mà còn phát triển trực giác toán học, từ đó nâng cao khả năng giải quyết các vấn đề phức tạp trong tương lai. Đặc biệt trong môi trường đại học kỹ thuật, nơi mà sự chủ động trong học tập và khả năng tư duy độc lập đóng vai trò quyết định đến thành công nghề nghiệp sau này, phương pháp phân tích đi lên trở thành yếu tố không thể thiếu. Nó tạo điều kiện để sinh viên không chỉ tiếp thu kiến thức mà còn phát triển khả năng tự nghiên cứu, chủ động tìm kiếm giải pháp thay vì thụ động tiếp nhận thông tin. Điều này phản ánh một triết lý giáo dục sâu sắc: học không phải là việc tiếp nhận một chiều mà là quá trình khám phá và tự xây dựng kiến thức, nơi sinh viên trở thành những người chủ động và sáng tạo trong việc giải quyết các thách thức thực tế.

Ưu điểm lớn nhất của phương pháp phân tích đi lên là giúp sinh viên hiểu sâu sắc bản chất của vấn đề và tăng cường khả năng vận dụng kiến thức. Tuy nhiên, phương pháp này cũng đặt ra một số thách thức nhất định, chẳng hạn như yêu cầu giảng viên phải chuẩn bị kỹ lưỡng về nội dung và phương pháp giảng dạy. Việc lựa chọn các bài toán xuất phát điểm sao cho phù hợp, hấp dẫn nhưng vẫn đảm bảo tính dẫn dắt là một nhiệm vụ không đơn giản. Hơn nữa, trong một số trường hợp, sinh viên có thể gặp khó khăn khi phải tự mình xây dựng kiến thức mà không có sẵn một hệ thống lý thuyết làm nền tảng. Một số sinh viên có thể gặp khó khăn khi phải tự mình khám phá kiến thức mà không có sự hướng dẫn rõ ràng từ trước. Do đó, việc kết hợp linh hoạt giữa phương pháp phân tích đi lên và phân tích đi xuống có thể là một giải pháp hiệu quả để tối ưu hóa quá trình giảng dạy.

2.3 So sánh và vận dụng

2.3.1. So sánh phương pháp phân tích đi lên và phân tích đi xuống

Để đánh giá sự khác biệt giữa hai phương pháp này trong giảng dạy toán cao cấp, bảng dưới đây sẽ so sánh chúng dựa trên các tiêu chí quan trọng như hiệu quả học tập, khả năng tư duy sáng tạo, mức độ tiếp thu kiến thức và động lực học tập của sinh viên.

Tiêu chí so sánh	Phương pháp phân tích đi lên	Phương pháp phân tích đi xuống
Hiệu quả học tập	Giúp sinh viên hiểu sâu sắc vấn đề, phát triển tư duy phân tích có hệ thống.	Cung cấp cái nhìn tổng quan ngay từ đầu, giúp sinh viên dễ dàng nắm bắt cấu trúc tổng thể của môn học.
Khả năng tư duy sáng tạo	Khuyến khích sinh viên tự khám phá, suy luận và tìm ra cách giải quyết vấn đề.	Hạn chế sự sáng tạo do sinh viên tiếp nhận kiến thức theo cấu trúc có sẵn.
Mức độ tiếp thu kiến thức	Có thể chậm hơn do sinh viên phải tự xây dựng kiến thức từ cơ sở.	Nhanh hơn do kiến thức được trình bày theo hệ thống sẵn có.
Động lực học tập	Sinh viên dễ hứng thú hơn khi khám phá kiến thức qua từng bước nhỏ.	Có thể gây khó khăn khi sinh viên tiếp nhận lượng lớn thông tin trừu tượng ngay từ đầu.

So sánh hai phương pháp phân tích đi lên và phân tích đi xuống trong giảng dạy Toán cao cấp đòi hỏi việc xem xét một loạt các tiêu chí quan trọng, trong đó bao gồm hiệu quả học tập, khả năng tư duy sáng tạo, mức độ tiếp thu kiến thức và động lực học tập của sinh viên. Phương pháp phân tích đi lên thường giúp sinh viên có khả năng hiểu sâu vấn đề, phát triển tư duy phân tích một cách có hệ thống, trong khi phương pháp phân tích đi xuống lại mang đến một cái nhìn tổng quát ngay từ đầu, giúp sinh viên dễ dàng nắm bắt cấu trúc tổng thể của môn học. Các nghiên cứu thực nghiệm đã chỉ ra rằng việc sử dụng phương pháp phân tích đi lên có thể cải thiện đáng kể khả năng tư duy logic và sáng tạo của sinh viên, nhưng lại có thể làm chậm quá trình tiếp thu nếu sinh viên không có nền tảng tốt hoặc thiếu sự hướng dẫn cụ thể từ giảng viên.

2.3.2. Vận dụng thực nghiệm để đánh giá hiệu quả của phương pháp.

Nội dung: Giới Hạn Của Dãy Số [5]

➤ Mục tiêu bài học:

• Sinh viên hiểu và nắm vững khái niệm giới hạn của dãy số.

• Phát triển tư duy logic và khả năng phản biện của sinh viên thông qua việc tự nghiên cứu, khám phá khái niệm từ các ví dụ cụ thể.

• Sinh viên có thể áp dụng phương pháp phân tích đi lên để đi từ các ví dụ cụ thể đến lý thuyết trừu tượng, giúp củng cố hiểu biết về giới hạn.

➤ Đối tượng học sinh: Sinh viên năm nhất, Toán cao cấp 1.

➤ Hoạt động giảng dạy:

HD 1: Giảng viên giới thiệu và đưa ra câu hỏi để kích thích tư duy sinh viên.

"Các bạn có thể chia sẻ một ví dụ về dãy số mà bạn nghĩ sẽ có một giá trị cụ thể khi n tiến dần về vô cùng không?"

Câu hỏi này tạo cơ hội cho sinh viên khám phá khái niệm giới hạn một cách trực tiếp và bắt đầu

suy nghĩ về sự hội tụ của các dãy số.

HD 2: Giảng viên bắt đầu với các ví dụ cụ thể để giúp sinh viên quan sát hành vi của các dãy số, từ đó dẫn dắt các em đến khái niệm giới hạn.

"Các bạn nhận thấy rằng khi tiến đến vô cùng, các giá trị của dãy số này ngày càng nhỏ hơn và tiến gần đến 0. Liệu chúng ta có thể kết luận gì về giới hạn của dãy số này khi tiến đến vô cùng?"

Kết luận: Giới hạn của dãy số $\left(\frac{1}{n}\right)$ khi $n \rightarrow \infty$ là 0.

"Khi quan sát dãy số này, các bạn nhận thấy tỷ lệ giữa hai số liên tiếp có xu hướng ổn định. Ví dụ: $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots$

Hãy thử tính tỷ lệ giữa hai số liên tiếp trong dãy Fibonacci. Các bạn có thể dự đoán giới hạn của tỷ lệ này là gì?"

Kết luận: Giới hạn của tỷ lệ giữa các số Fibonacci là số vàng $\varphi \approx 1,618$.

HD 3: Hướng dẫn phân tích và tìm hiểu các khái niệm

Sau khi minh họa các ví dụ, giảng viên phân tích và giải thích các khái niệm cơ bản trong giới hạn.

Cận trên và cận dưới của dãy số: Giảng viên giải thích khái niệm cận trên và cận dưới qua các ví dụ.

"Dãy số $\left(\frac{1}{n}\right)$ có cận trên là 1 và cận dưới là 0. Cận dưới là giá trị mà dãy số không thể nhỏ hơn, còn cận trên là giá trị mà dãy số không thể vượt qua."

Giảng viên yêu cầu sinh viên xác định cận trên và cận dưới của các dãy số khác.

Định nghĩa Giới hạn dãy số: Giảng viên giải thích định nghĩa giới hạn một cách chính thức.

"Dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn là $a \in \mathbb{R}$ khi $n \rightarrow \infty$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số tự nhiên N đủ lớn sao cho $\forall n > N$ thì $|x_n - a| < \varepsilon$. Khi đó

ta viết $\lim x_n = a$ (hay $x_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow \infty$)”[5]

HD 4: Thực hành và thảo luận nhóm

Giảng viên chia sinh viên thành các nhóm nhỏ để cùng nhau thảo luận về các ví dụ khác, đồng thời áp dụng các khái niệm đã học.

Bài tập nhóm: Sinh viên sẽ làm việc theo nhóm để tìm giới hạn của các dãy số sau:[6]

$$1. a_n = \frac{2n+1}{3n-5}$$

$$2. a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$3. a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$$

Các nhóm sẽ áp dụng các khái niệm cận trên, cận dưới, và phương pháp epsilon-delta để xác định giới hạn của các dãy số trên. Sau khi hoàn thành, mỗi nhóm sẽ trình bày cách tiếp cận và kết luận của mình trước lớp.

HD 5: Tổng kết và Đánh giá

Giảng viên ôn lại các khái niệm chính đã được học trong bài.

Giảng viên giao bài tập về nhà để củng cố kiến thức.

Giảng viên yêu cầu sinh viên phản hồi về kiến thức tổng quát bài học

Tóm lại, phương pháp phân tích đi lên giúp sinh viên tiếp cận các khái niệm toán học từ những ví dụ cụ thể và dần dần xây dựng nền tảng lý thuyết vững chắc. Qua đó, sinh viên không chỉ tiếp thu kiến thức mà còn phát triển khả năng tư duy phân biện, tự nghiên cứu và áp dụng kiến thức vào thực tế, chuẩn bị tốt cho nghề nghiệp sau này.

2.3.3. Đề xuất mô hình kết hợp cả hai phương pháp để tối ưu hóa giảng dạy Toán cao cấp.

Các nghiên cứu thực nghiệm đã chỉ ra rằng phương pháp phân tích đi lên mang lại nhiều lợi ích rõ rệt, đặc biệt đối với sinh viên có tư duy logic mạnh mẽ và sự ham thích khám phá kiến thức theo từng bước. Phương pháp này không chỉ khuyến khích sinh viên chủ động tìm tòi, phát triển khả năng tư duy phân biện mà còn giúp họ nắm bắt kiến thức một cách sâu sắc và bền vững. Việc bắt đầu từ những ví dụ cụ thể, dần dần xây dựng từ các khái niệm cơ bản đến các lý thuyết

phức tạp, giúp sinh viên tự hiểu và tự tìm ra các quy luật toán học. Điều này tạo ra một quá trình học tập chủ động và sáng tạo, cho phép sinh viên phát triển kỹ năng tự nghiên cứu và khả năng phân tích sâu sắc [6].

Tuy nhiên, mặc dù phương pháp phân tích đi lên có những ưu điểm vượt trội, việc kết hợp nó với phương pháp phân tích đi xuống sẽ mang lại hiệu quả giảng dạy tối ưu. Phương pháp phân tích đi xuống, với việc cung cấp một cái nhìn tổng thể về vấn đề ngay từ đầu, giúp sinh viên có được một bức tranh toàn diện về nội dung học tập trước khi đi vào chi tiết. Sự kết hợp giữa hai phương pháp này giúp sinh viên vừa có thể xây dựng nền tảng vững chắc từ những cái nhìn tổng quan, vừa phát triển khả năng tư duy phân tích, từ đó dễ dàng tiếp thu kiến thức chuyên sâu và phát triển khả năng sáng tạo trong học tập. Phương pháp này không chỉ giúp sinh viên hiểu rõ và áp dụng kiến thức hiệu quả mà còn chuẩn bị cho họ những kỹ năng cần thiết trong môi trường học thuật và nghề nghiệp tương lai.

III. KẾT LUẬN

Phương pháp phân tích đi lên đã được chứng minh là một công cụ giảng dạy hiệu quả trong Toán cao cấp, đặc biệt tại các trường đại học kỹ thuật. Bằng cách xây dựng kiến thức từ những bài toán cụ thể, phương pháp này giúp sinh viên không chỉ hiểu sâu bản chất của các khái niệm toán học mà còn rèn luyện tư duy logic, phát triển trực giác toán học và nâng cao khả năng tự nghiên cứu. Thay vì tiếp cận trực tiếp từ lý thuyết trừu tượng, sinh viên có cơ hội khám phá quy luật toán học thông qua quá trình quan sát, thử nghiệm và tổng quát hóa, từ đó hình thành nền tảng kiến thức vững chắc và bền vững hơn. Tuy nhiên, để tối ưu hóa hiệu quả giảng dạy, phương pháp phân tích đi lên có thể được kết hợp một cách hợp lý với phương pháp phân tích đi xuống nhằm cung cấp một cái nhìn tổng thể khi cần thiết, giúp sinh viên định hướng tốt hơn trong quá trình học tập. Nghiên cứu này khẳng định rằng phương pháp phân tích đi lên không chỉ nâng cao chất lượng giảng dạy Toán cao cấp mà còn góp phần phát triển năng lực tư duy toán học một cách toàn diện cho sinh viên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Carlo Cellucci (2013), *Top-Down and Bottom-Up Philosophy of Mathematics*, *Philosophia Mathematica*, 21(3), 297–310.
- [2] Hasan Temel, & Halil Gür (2025), *Comparison of Secondary School Mathematics Curriculums in Türkiye According to the Top-down and Bottom-up Approach*, *Hacettepe University Journal of Education*, 40(1), 123–138.
- [3] Peg Dawson - Richard Guare (2016), *Phương pháp học tập thông minh*, Nxb Dân trí, Thành phố Hồ Chí Minh.
- [4] Nguyễn Bá Kim (2007), *Phương pháp dạy học môn Toán*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.
- [5] Nguyễn Đức Khiêm (2019), *Giáo trình Toán cao cấp 1*, Trường Đại học Xây dựng Miền Tây, Vĩnh Long.
- [6] Hoàng Công Thiện (2019), *Tự học Toán 1 thông qua 450 bài tập theo chuyên đề*, Trường Đại học Xây dựng Miền Tây, Vĩnh Long.