

PHÂN TÍCH CÁC LỖI THƯỜNG GẶP CỦA SINH VIÊN ĐẠI HỌC KHI GIẢI BÀI TẬP TỔ HỢP- XÁC SUẤT

Lê Thị Huệ

Khoa ĐC- NN- QPAN, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vinh

Tóm tắt: Tổ hợp và xác suất tạo thành một thành phần nền tảng của giáo dục toán học, đặc biệt là trong khoa học, công nghệ, kỹ thuật và kinh tế. Tuy nhiên, trong thực tế, nhiều sinh viên đại học gặp phải những khó khăn đáng kể khi giải quyết các vấn đề trong các lĩnh vực này. Bài báo này phân tích những lỗi phổ biến nhất mà sinh viên mắc phải khi giải các bài tập tổ hợp và xác suất. Nghiên cứu xác định một loạt các vấn đề, bao gồm hiểu lầm về khái niệm, áp dụng sai công thức, xác định không đúng các sự kiện có liên quan và lỗi trong suy luận logic và giải quyết vấn đề. Bài báo cũng đề xuất các khuyến nghị để giúp giảng viên nâng cao các chiến lược giảng dạy của họ nhằm cải thiện khả năng hiểu và giải quyết vấn đề của sinh viên trong lý thuyết xác suất.

Keywords: xác suất, tổ hợp, giải quyết vấn đề, giảng dạy toán học.

ANALYZING COMMON ERRORS IN UNIVERSITY STUDENTS' SOLUTIONS TO COMBINATORICS AND PROBABILITY EXERCISES

Le Thi Hue

Faculty of Geography – Agriculture – National Defense and Security Education,
Vinh University of Technical Education

Abstract: Combinatorics and probability form a foundational component of mathematical education, particularly in science, technology, engineering, and economics. However, in practice, many university students encounter significant difficulties when solving problems in these areas. This paper analyzes the most common errors made by students in solving combinatorics and probability exercises. The study identifies a range of issues, including conceptual misunderstandings, misapplication of formulas, incorrect identification of relevant events, and errors in logical reasoning and problem-solving. The paper also proposes recommendations to help instructors enhance their teaching strategies to improve students' comprehension and problem-solving skills in probability theory.

Keywords: probability, combinatorics, problem-solving, teaching mathematics

Nhận bài: 10/05/2025

Phản biện: 12/06/2025

Duyệt đăng: 16/06/2025

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Môn Xác suất thống kê là một trong những học phần cơ sở quan trọng trong chương trình đào tạo của nhiều ngành học, đặc biệt là các ngành kỹ thuật, công nghệ, kinh tế và khoa học dữ liệu. Việc nắm vững các khái niệm và phương pháp giải toán xác suất là một yêu cầu thiết yếu đối với sinh viên đại học, đặc biệt là những ngành liên quan đến phân tích dữ liệu và ra quyết định dựa trên thông tin không chắc chắn. Tuy nhiên, nhiều nghiên cứu cho thấy sinh viên thường gặp nhiều khó khăn và mắc phải những sai lầm có hệ thống khi tiếp cận và giải các bài tập xác suất [1, 2, 3].

Kinh nghiệm thực tế trong giảng dạy xác suất tại các trường đại học trong những năm gần đây đã cho thấy một số khó khăn mà SV thường gặp phải. Trong các bài tập liên quan đến tổ hợp hoặc các phương pháp đại số, nhiều SV gặp khó khăn với các kỹ thuật đếm cơ bản, chẳng hạn như xác định số cách chọn k phần tử từ một tập hợp gồm n phần tử — mặc dù đây là kiến thức đã được học ở cấp trung học phổ thông. Hơn nữa, SV thường

không nhận ra mô hình bài toán phù hợp. Khi đối mặt với các lời giải khác nhau, họ thường bối rối và không thể phân biệt được giữa hai lời giải đó. Do vậy, ngay cả sau khi hoàn thành một bài toán, họ có thể thiếu tự tin vào câu trả lời của mình. Ở giai đoạn đầu học tập, SV thường gặp khó khăn trong việc diễn đạt rõ ràng sự hiểu biết của mình, thường trình bày lập luận một cách dài dòng, phức tạp và thiếu logic. Họ có xu hướng thiếu trực giác xác suất và chưa nắm bắt được mối quan hệ giữa ngữ nghĩa và cú pháp của ngôn ngữ xác suất. Do đó, họ cảm thấy khó khăn trong việc phân biệt khi nào nên áp dụng quy tắc xác suất toàn phần và khi nào nên sử dụng định lý Bayes.

Ngoài những thách thức này, SV thường mắc phải một số lỗi đáng chú ý, bao gồm: bỏ qua việc xem xét phép thử cơ bản của bài toán; xác định sai biến cố cần tính xác suất, cùng với các biến cố liên quan; áp dụng sai các khái niệm, quy tắc, định lý và công thức; thiết lập sai mối quan hệ giữa các biến cố; và mắc lỗi trong suy luận logic, diễn đạt

và chia các trường hợp của bài toán

Những sai lầm này không chỉ xuất phát từ việc thiếu hụt kiến thức nền tảng mà còn do những ngộ biện trực giác, hiểu sai về bản chất ngẫu nhiên và các quy tắc xác suất cơ bản. Việc nhận diện và phân tích các lỗi thường gặp này có vai trò quan trọng trong việc cải thiện phương pháp giảng dạy, giúp SV khắc phục những khó khăn và nâng cao hiệu quả học tập môn xác suất.

Bài báo này tập trung vào việc phân tích một số lỗi điển hình mà SV đại học thường mắc phải khi giải các bài tập xác suất. Thông qua việc xem xét các ví dụ cụ thể và lý giải nguyên nhân của những sai lầm này, tác giả hy vọng sẽ cung cấp một cái nhìn sâu sắc hơn về những thách thức mà sinh viên gặp phải, từ đó đề xuất những gợi ý sư phạm nhằm giảm thiểu các lỗi tương tự trong tương lai.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Trong quá trình giảng dạy và đánh giá kết quả học tập của sinh viên đại học đối với nội dung về Tổ hợp – Xác suất, tác giả nhận thấy nhiều lỗi sai lặp đi lặp lại với tần suất đáng kể. Những sai lầm này không chỉ là hệ quả của việc chưa nắm vững kiến thức nền tảng mà còn phản ánh sự thiếu hụt về mặt tư duy logic, trực giác xác suất và khả năng mô hình hóa bài toán thực tế. Mục tiêu của phần này là phân tích cụ thể các lỗi thường gặp qua từng nhóm nội dung tiêu biểu, từ đó làm rõ bản chất của từng sai lầm và nguyên nhân sâu xa khiến SV dễ mắc phải.

2.1. Sai lầm khi nhận dạng và thể hiện khái niệm tổ hợp - xác suất

Sai lầm về các khái niệm Toán học đặc biệt là các khái niệm ban đầu có tính chất nền tảng sẽ dẫn đến hệ quả tất yếu học kém toán. Vì vậy có thể nói sự “mất gốc” của HS về kiến thức Toán học trước hết đó là sự “mất gốc” về các khái niệm.

Ví dụ 1: Trong một lớp học có 24 nam và 20 nữ. Cần chọn hai người, một nam và một nữ đi biểu diễn trong lễ kỉ niệm mừng ngày Quốc khánh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải sai:

Chọn 1 bạn nam trong 24 bạn nam, có 24 cách chọn. Chọn 1 bạn nữ trong 20 bạn nữ, có 20 cách chọn.

Như vậy có $24 + 20 = 44$ cách chọn (Áp dụng quy tắc cộng).

Phân tích: Thực ra ở đây phải dùng quy tắc

nhân và ta có $24 \cdot 20 = 480$ cách chọn. Nếu chỉ chọn một người thì mới áp dụng quy tắc cộng.

2.2. Sai lầm trong việc lựa chọn các khái niệm, quy tắc, định lý để vận dụng vào giải toán

Kiến thức về Tổ hợp và Xác suất có nhiều khái niệm, quy tắc mới mà khi vận dụng vào giải toán SV rất hay nhầm lẫn và dẫn đến sai lầm.

Ví dụ 2: Một nhóm 6 bạn A, B, C, D, E, F. Cần chọn ra 3 bạn thì có bao nhiêu cách chọn?

Sau đây là một số lời giải của SV.

Sinh viên 1:

Đầu tiên chọn 1 bạn thì có 6 cách chọn.

Tiếp theo chọn 1 bạn trong 5 người còn lại thì có 5 cách. Cuối cùng chọn 1 bạn trong 4 bạn còn lại có 4 cách.

Vậy có: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ cách

Sinh viên 2:

Đầu tiên chọn 1 bạn thì có 6 cách chọn.

Tiếp theo chọn 2 bạn trong 5 bạn còn lại thì có

$C_5^2 = 10$ cách.

Vậy có: $6 \cdot 10 = 60$ cách

Sinh viên 3:

Đầu tiên chọn 2 bạn thì có $C_6^2 = 15$ cách chọn.

Tiếp theo chọn 1 bạn trong 4 bạn còn lại thì có 4 cách.

Vậy có: $15 \cdot 4 = 60$ cách

Sinh viên 4:

Chọn 3 bạn trong 6 bạn là số tổ hợp chập 3 của

6. Số cách chọn là: $C_6^3 = 20$

Phân tích: có 4 lời giải với kết quả khác nhau, trong đó có SV 2 và 3 cho kết quả giống nhau, phải chăng đó là kết quả đúng?

Phân tích lời giải SV 1:

Đầu tiên chọn 1 bạn trong 6 bạn, dĩ nhiên có 6 cách:

+ Nếu đầu tiên chọn A, lần hai chọn B, lần 3 chọn C thì có 3 bạn là A, B, C.

+ Nếu đầu tiên chọn B, lần hai chọn A, lần 3 chọn C thì có 3 bạn là B, A, C. Như vậy cách chọn này đã bị lặp. Lời giải chưa đúng.

Gợi ý tương tự cho lời giải của SV 2 và 3, đều sai.

Lời giải của SV 4 tuy đơn giản nhưng đúng.

Ví dụ 3: Một câu lạc bộ khiêu vũ có 6 nam và 10 nữ, cần chọn ra 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp nhảy. Hỏi có bao nhiêu cách ghép 3 cặp nhảy.

Sinh viên 1:

- Số cách chọn thứ tự 3 nam trong 6 nam là $A_6^3 = 120$ cách, chọn 3 nữ trong 10 nữ là $A_{10}^3 = 720$. Vậy số cách chọn 3 đôi nam nữ là: $120 \cdot 720 = 86400$ cách.

Sinh viên 2:

- Số cách chọn 3 nam trong 6 nam là $C_6^3 = 20$ cách, chọn 3 nữ trong 10 nữ là $C_{10}^3 = 120$. Vậy số cách chọn 3 đôi nam nữ là: $20 \cdot 120 = 2400$ cách.

Sinh viên 3:

- Số cách chọn 3 nam trong 6 nam là $C_6^3 = 20$ cách, chọn 3 nữ trong 10 nữ là $C_{10}^3 = 120$.

- Vì một đôi có hai bạn (1 nam, 1 nữ) nên chọn ra 1 bạn nam (trong 3 bạn nam) và một bạn nữ (trong 3 bạn nữ) thì có: $3 \cdot 3 = 9$ (cách)

- Vậy số cách chọn thỏa mãn là: $9 \cdot 20 \cdot 120 = 21600$ cách

Sinh viên 4:

- Số cách chọn 3 nam trong 6 nam là $C_6^3 = 20$ cách, chọn 3 nữ trong 10 nữ là $C_{10}^3 = 120$. Vậy số cách chọn 3 nam, 3 nữ là: $20 \cdot 120 = 2400$.

- Trong 6 người chọn ra thì có $3!$ (cách) ghép giữa các đôi này với nhau (là hoán vị của 3 nam hoặc của 3 nữ)

- Vậy số cách chọn thỏa mãn là: $3! \cdot 240 = 19200$ cách.

Đâu là lời giải đúng?

Phân tích: Lời giải 1: Rõ ràng là sai vì bài toán không yêu cầu thứ tự. Lời giải 2: Thiếu số cách chọn để ghép thành các đôi. Lời giải 3: Có vẻ như đúng, tuy nhiên ở bước cuối đã nhầm lẫn việc chọn ra 3 đôi với việc chỉ đơn thuần chọn ra 1 nam và 1 nữ.

Lời giải 4: Là lời giải đúng.

Ví dụ 4: Trong một lớp học có 10 nam và 12 nữ. Cần chọn 5 SV trong đó có ít nhất 2 SV nữ thì có bao nhiêu cách chọn?

Sinh viên 1: tính trực tiếp.

Chia các trường hợp:

Trường hợp (TH) 1: 2 nữ, 3 nam; có

$$C_{12}^2 \cdot C_{10}^3 = 7920$$

TH 2: 3 nữ, 2 nam; có $C_{12}^3 \cdot C_{10}^2 = 9900$

TH 3: 4 nữ, 1 nam; có $C_{12}^4 \cdot C_{10}^1 = 4950$

TH 4: 5 nữ; có $C_{12}^5 = 792$

Vậy có: $7920 + 9900 + 4950 + 792 = 23562$ cách.

Sinh viên 2: tính gián tiếp.

Bước 1: Chọn 5 SV trong 22 bạn trong lớp thì có $C_{22}^5 = 26334$ cách.

Bước 2: Chọn 5 SV nam, có $C_{10}^5 = 252$ cách

Bước 3: Chọn 4 nam, 1 nữ; có:

$$C_{10}^4 \cdot C_{12}^1 = 2520 \text{ cách}$$

Vậy số cách chọn 5 SV trong đó có ít nhất 2 SV nữ là: $26334 - (252 + 2520) = 23562$ cách.

Sinh viên 3: cách giải ngắn và “độc đáo”.

Bước 1: Chọn 2 SV nữ (vì có ít nhất 2 SV nữ), có $C_{12}^2 = 66$ cách.

Bước 2: Chọn 3 SV từ 20 SV còn lại, có

$$C_{20}^3 = 1140 \text{ cách.}$$

Khi đó 5 bạn lựa chọn luôn có ít nhất 3 nữ.

Vậy có: $66 \cdot 1140 = 75240$ cách

Phân tích: có 3 lời giải trong đó 2 kết quả giống nhau, lời giải nào đúng?

Với SV 1 theo cách liệt kê đầy đủ tất cả các khả năng có thể xảy ra, dù lời giải có hơi dài dòng nhưng cho kết quả đúng.

Với SV 2 theo cách tính gián tiếp, theo biên cố xung khắc, lời giải gọn hơn và kết quả đúng.

Lời giải của SV 3 vừa ngắn gọn, vừa “có lý” nhưng sai ở đâu?

Chọn 2 nữ, đương nhiên có $C_{12}^2 = 66$ cách.

+ Nếu bước đầu chọn được 2 bạn nữ A, B; trong 3 bạn còn lại có 2 bạn nữ C, D và bạn E.

+ Nếu bước đầu chọn được 2 bạn nữ C, D; trong 3 bạn còn lại có bạn A, B và bạn E.

Như vậy, 2 lựa chọn này bị lặp, cách giải không đúng.

2.3. Sai lầm trong tư duy lập luận, phân tích dữ liệu và mô hình hóa bài toán

Ví dụ 5: Bố mẹ bạn Khánh (là con trai) có 2 người con (Khánh là một trong hai người con). Xác suất để Khánh có chị hoặc em gái là bao nhiêu?

Lời giải 1:

Khánh có một người anh/ chị em, có 2 khả năng: đó là con trai hoặc là con gái. Xác suất để người đó là con gái là $1/2$.

Lời giải 2:

Có 4 khả năng cho gia đình có 2 con: {T, T}; {T, G}; {G, T}; {G, G}. (T- con trai, G- con gái; xếp theo thứ tự con thứ nhất, con thứ hai). Vì

Khánh là con trai nên loại đi khả năng $\{G, G\}$; còn lại 3 khả năng $\{T, T\}$; $\{T, G\}$; $\{G, T\}$. Trong số 3 khả năng đó thì có 2 khả năng có con gái. Vì vậy, xác suất để Khánh có chị hoặc em gái là $2/3$.

Phân tích: Lời giải 1 mạch lạc, đơn giản phù hợp với tâm lý phán đoán của SV tuy nhiên lời giải 2 nghe cũng “có lý”. Đây là lỗi sai không phải chỉ SV mắc phải mà ngay các nhà nghiên cứu [5] cũng còn nhiều tranh cãi. Phải thấy rằng, trong lời giải 2, ta thấy khả năng $\{T, T\}$ thực ra không phải là một khả năng đơn, mà là một khả năng kép gồm có 2 khả năng trong đó: Khánh là người con trai thứ nhất, hoặc là người con trai thứ hai. Như vậy phải tính $\{T, T\}$ là 2 khả năng $\{T=\text{Khánh}, T\}$ và $\{T, T=\text{Khánh}\}$. Như thế tổng cộng vẫn có 4 khả năng, và xác suất vẫn là $2/4 = 1/2$. Sai ở đây là sai trong cách đếm số khả năng.

Từ những ví dụ và phân tích đã trình bày, có thể thấy rằng sinh viên đại học thường mắc phải nhiều sai lầm điển hình trong quá trình giải các bài toán Tổ hợp – Xác suất. Việc phát hiện và phân loại cụ thể các lỗi giúp giảng viên có cơ sở để điều chỉnh phương pháp giảng dạy, đồng thời giúp sinh viên

nhận biết được những “bẫy sai lầm” thường gặp để tránh mắc phải. Đây chính là tiền đề quan trọng để nâng cao chất lượng dạy – học xác suất trong các cơ sở đào tạo đại học hiện nay.

III. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này đã làm sáng tỏ một số lỗi thường gặp mà sinh viên đại học mắc phải khi giải các bài tập tổ hợp và xác suất, những lĩnh vực có vai trò then chốt trong nhiều ngành học quan trọng. Kết quả phân tích cho thấy những khó khăn của sinh viên không chỉ giới hạn ở việc nắm vững các công thức mà còn bao gồm những hiểu lầm về bản chất khái niệm, khả năng xác định các yếu tố liên quan trong bài toán, và kỹ năng suy luận logic. Việc nhận diện rõ ràng những lỗi này là bước quan trọng để cải thiện chất lượng giảng dạy và học tập môn xác suất. Đồng thời, tác giả cũng đề xuất các giảng viên nên chú trọng hơn nữa vào việc làm rõ các khái niệm cốt lõi, tăng cường luyện tập các bài toán đa dạng để sinh viên có thể nhận diện và áp dụng đúng các phương pháp, đồng thời khuyến khích tư duy phản biện và khả năng tự kiểm tra kết quả.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2008). Introducing the emerging discipline of statistics education. *School Science and Mathematics*, 108(8), 355-361.
2. Ramirez, C., Schau, C., & Emmioğlu, E. S. M. A. (2012). The importance of attitudes in statistics education. *Statistics education research journal*, 11(2), 57-71.
3. Gal, Y. (1997). *The assessment challenge in statistics education*. IOS press.
4. Trần, Thị Bích Hòa, and Quốc Thịnh Nguyễn (2023). "Xác suất thống kê."
5. Nguyễn Tiến Dũng và Đỗ Đức Thái (2015). *Nhập môn hiện đại xác suất thống kê*.