

KHÁI NIỆM n – ACCESSIBLE ĐỐI VỚI QUỸ ĐẠO
CỦA NHÓM ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Võ Duy Hoàng

Khoa Cơ bản, Trường Đại học công nghệ Đông Á

Tóm tắt: Trong bài viết, tác giả giới thiệu khái niệm n -accessible đối với quỹ đạo của nhóm đại số reductive tác động lên một đa tạp affine trên trường bất kỳ. Khái niệm được xây dựng dựa trên lý thuyết bao đóng đối đặc trưng và định lý Hilbert–Mumford hữu tỉ của Bate, Herpel, Martin và Röhrle. Mỗi quỹ đạo được xét qua chuỗi hữu hạn các phép lấy giới hạn đối với đối đặc trưng nhằm xác định tính n -accessibility. Mục tiêu chính là làm rõ khái niệm này và trình bày các kết quả liên quan đến tính chất của các quỹ đạo G -đóng đối đặc trưng, qua đó giúp phân tích mối quan hệ giữa quỹ đạo hình học và quỹ đạo hữu tỉ trong đa tạp đại số. Tác giả cũng cung cấp ví dụ minh họa và ứng dụng để làm nổi bật vai trò của khái niệm n -accessible trong nghiên cứu cấu trúc quỹ đạo của nhóm đại số.

Từ khóa: n – Accessible, Bao đóng đối đặc trưng, Định lý Hilbert–Mumford hữu tỉ, Nhóm đại số, Nhóm reductive, Lý thuyết bất biến hình học

THE CONCEPT OF n -ACCESSIBLE FOR ORBITS OF ALGEBRAIC
GROUPS AND SOME PROPERTIES

Vo Duy Hoang

Faculty of General Studies, Dong A University of Technology

Abstract: In this paper, the author introduces the concept of n -accessible for the orbits of a reductive algebraic group acting on an affine variety defined over an arbitrary field. This concept is developed based on the theory of cocharacter-closure and the rational version of the Hilbert–Mumford Theorem as formulated by Bate, Herpel, Martin, and Röhrle. Each orbit is examined through a finite sequence of limits along cocharacters to determine its n -accessibility. The main goal is to clarify this concept and present key results related to the properties of cocharacter-closed orbits, thereby facilitating the analysis of the relationship between geometric and rational orbits in algebraic varieties. The paper also includes illustrative examples and applications that highlight the role of the n -accessible concept in studying the orbit structure of algebraic groups.

Keywords: n -accessible, cocharacter-closure, rational Hilbert–Mumford Theorem, algebraic group, reductive group, geometric invariant theory.

Nhận bài: 05/5/2025

Phản biện: 22/5/2025

Duyệt đăng: 25/5/2025

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong lý thuyết bất biến hình học (Geometric Invariant Theory), việc nghiên cứu cấu trúc của các quỹ đạo của một nhóm đại số reductive G tác động lên một đa tạp affine V luôn là một vấn đề trung tâm. Một kết quả cổ điển trong lĩnh vực này là Định lý Hilbert–Mumford, khẳng định rằng đối với một quỹ đạo G -đóng, tồn tại một đối đặc

trung λ sao cho giới hạn $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(a) \cdot v$ tồn tại trong quỹ đạo đó. Tuy nhiên, khi xét trên trường không đại số đóng, vấn đề trở nên phức tạp hơn do sự xuất hiện của các quỹ đạo không đóng. Điều này đòi hỏi phải mở rộng các khái niệm và phát triển công cụ mới để mô tả sự đóng của các quỹ đạo theo nghĩa hữu tỉ. Cocharacter-closure and the rational Hilbert–Mumford Theorem (Math. Z., 2017), Bate, Herpel, Martin và Röhrle đã đưa ra một lý thuyết tổng quát về bao đóng đối đặc trưng (cocharacter-closure) của các quỹ đạo $G(k)$ trong các không gian không đóng đại số.

Họ cũng phát biểu và chứng minh một phiên bản hữu tỉ của Định lý Hilbert–Mumford (Rational Hilbert–Mumford Theorem), giúp nghiên cứu cấu trúc của các quỹ đạo $G(k)$ thông qua các đối đặc trưng $\lambda \in Y_k(G)$. Kết quả này mở ra nhiều hướng nghiên cứu mới, đặc biệt là trong việc phân tích các quỹ đạo không đóng và mối quan hệ giữa chúng với các quỹ đạo $G(k)$ -đóng trong không gian hình học.

Nghiên cứu này tập trung làm rõ khái niệm n -accessible đối với các quỹ đạo của $G(k)$, dựa trên các khái niệm liên quan tới tính đóng đối đặc trưng. Khái niệm n -accessible mô tả một dạng liên thông từng bước giữa các quỹ đạo $G(k)$ thông qua các phép lấy giới hạn đối đặc trưng. Mục tiêu chính là làm rõ khái niệm n -accessible và trình bày một số kết quả quan trọng liên quan đến tính chất của các quỹ đạo $G(k)$ -đóng đối đặc trưng và cách mà khái niệm này có thể được áp dụng để

phân tích cấu trúc quỹ đạo của nhóm đại số.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Quỹ đạo đóng đối đặc trưng và bao đóng đối đặc trưng

Quỹ đạo $G(k).v$ đóng đối đặc trưng trên K với mọi $\lambda \in Y_k(G)$, nếu $v' := \lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a).v$ tồn tại thì $v' \in G(k).v$.

(a) Cho một tập con X của V , ta nói X là đóng đối đặc trưng (trên K) nếu với mọi $v \in X$ và mọi $\lambda \in Y_k(G)$ sao cho $v' := \lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a).v$ tồn tại, $v' \in X$. Lưu ý rằng định nghĩa này trùng khớp với định nghĩa trên nếu $X = G(k).v$ với $v \in V$.

(b) Cho một tập con X của V , ta định nghĩa bao đóng đối đặc trưng của X (trên K), ký hiệu là $\overline{X}^c$, là tập con nhỏ nhất của V sao cho $X \subseteq \overline{X}^c$ và $\overline{X}^c$ là đóng đối đặc trưng.

(c) Giả sử G là một nhóm reductive tác động lên không gian affine V . Cho $v \in V$ và xét quỹ đạo $G(k).v$. Bao đóng đối đặc trưng của quỹ đạo này được định nghĩa như sau:

$$G(k).v = \{w \in V \mid \exists \lambda \in Y_k(G), \lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a).v = w\}$$

Cho $v, v' \in V$, ta viết $G(k).v' \prec G(k).v$ nếu $v' \in G(k).v$. Khi đó rõ ràng $\prec$ có tính phản xạ và bắc cầu, do đó $\prec$ cho ta thứ tự sắp xếp trên tập các $G(k)$ -quỹ đạo trong V .

Cho $v \in V$ và giả sử G_v xác định trên k . Khi đó ta có: (i) Nếu $G.v$ là đóng Zariski thì $G(k).v$ là đóng đối đặc trưng trên k ; (ii) Cho k'/k là một mở rộng đại số và giả sử $G(k').v$ là đóng đối đặc trưng trên k' . Khi đó $G(k).v$ cũng đóng đối đặc trưng trên k . Hơn nữa, điều ngược lại đúng với điều kiện $v \in V(k)$ và k'/k là mở rộng tách; (iii) Cho S là một xuyên xác định trên k của G_v và đặt $L = C_G(S)$. Khi đó $G(k).v$ là đóng đối đặc trưng trên k khi và chỉ khi $L(k).v$ là đóng đối đặc trưng trên k ; (iv) Giả sử $w \in V$ và giả sử $G(k).w \prec G(k).v$ và $G(k).v \prec G(k).w$. Khi đó $G(k).v = G(k).w$.

2.2. Khái niệm n -accessible và một số tính chất liên quan

Định nghĩa 2.2.1. Giả sử $v, v' \in V$. Ta nói rằng quỹ đạo $G(k).v'$ có thể truy cập 1-acc từ $G(k).v$ nếu tồn tại $\lambda \in Y_k(G)$ sao cho $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a).v$ tồn tại và nằm trong $G(k).v'$. Tương tự, với $n \geq 1$, ta nói rằng $G(k).v'$ có thể truy cập n -acc từ $G(k).v$ nếu tồn tại một chuỗi hữu hạn các quỹ đạo $G(k).v = G(k).v_1, G(k).v_2, \dots, G(k).v_{n+1} = G(k).v'$ với $G(k).v_{i+1}$ có thể truy cập 1-acc được từ $G(k).v_i$ với mỗi $1 \leq i \leq n$. Ta nói $G(k).v'$ có thể truy cập được từ $G(k).v$ nếu nó có thể truy cập n -acc tới $G(k).v$ với $n \geq 1$ nào đó.

Lưu ý rằng định nghĩa này không phụ thuộc vào đại diện được chọn của $G(k).v$ vì nếu $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a).v = v'' \in G(k).v'$ và $g \in G(k)$ thì $\lim_{a \rightarrow 0} (g.\lambda)(a).(g.v) = gv'' \in G(k).v'$. Rõ ràng từ các định nghĩa trên, ta có thể thấy: nếu $G(k).v'$ có thể truy cập 1-acc từ $G(k).v$ thì $G(k).v' \prec G(k).v$. Điều ngược lại là không đúng, nghĩa là tính accessible không có tính bắc cầu, nhưng ta vẫn có những khẳng định sau:

Bổ đề 2.2.2 Giả sử $v \in V$.

(i) Ta có $G(k).v = \bigcup G(k).v'$, trong đó phép hợp được thực hiện trên tất cả $v' \in V$ sao cho $G(k).v'$ có thể truy cập được từ $G(k).v$.

(ii) Thứ tự đặt trước $\prec$ hàm ý quan hệ n -acc phải theo đúng thứ tự; nghĩa là, cho $v, v' \in V$, $G(k).v' \prec G(k).v$ khi và chỉ khi tồn tại một dãy hữu hạn từ $G(k).v$ đến $G(k).v'$ như trong Định nghĩa 2.3.1.

Chứng minh: (i) Gọi X là hợp được xác định ở trên. Khi đó cho $v \in X$, $G(k).v'$ có thể truy cập được từ $G(k).v$. Nhưng nếu $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a).v' = v''$ tồn tại với $\lambda \in Y_k(G)$, thì $G(k).v''$ có thể truy cập được 1-acc từ $G(k).v'$, và do đó $G(k).v''$ có thể truy cập được từ $G(k).v$, vì vậy $v'' \in X$. Do đó X là đóng đối đặc trưng trên k . Vì $G(k).v \subseteq X$, nên ta có $G(k).v \subseteq X$. Nhưng phép bao hàm ngược lại rất rõ ràng: theo định nghĩa, bao đóng đối đặc trưng của $G(k).v$ phải chứa tất cả các quỹ đạo có thể truy cập 1-acc từ $G(k).v$, và lại có tất cả các quỹ đạo có thể truy cập 1-acc được từ các quỹ đạo đó, v.v; (ii) Suy ra từ (i)

Định lý 2.3.3 (Định lý Hilbert–Mumford hữu tỉ)

Giả sử $v \in V$. (i) Có duy nhất một $G(k)$ -quỹ đạo đóng đối đặc trưng (trên k) có thể truy cập 1-acc từ $G(k).v$.

(ii) Quỹ đạo của phần (i) là quỹ đạo $G(k)$ -đóng đối đặc trưng duy nhất trong $G(k).v$.

(iii) Nếu $G(k).v' \prec G(k).v$, thì quỹ đạo $G(k).v'$ đóng đối đặc trưng duy nhất trong $G(k).v$ và $G(k).v'$ bằng nhau.

2.3. Một số kết quả quan trọng và ứng dụng

2.3.1. Các kết quả chính liên quan đến khái niệm n -accessible. Ta có một số kết quả sau: Mỗi quỹ đạo $G(k)$ -đóng đối đặc trưng tồn tại duy nhất trong bao đóng đối đặc trưng của một quỹ đạo bất kỳ; Nếu một quỹ đạo $G(k).v'$ là n -accessible từ $G(k).v$, thì $v' \in G(k).v$. Điều này có nghĩa là mọi quỹ đạo n -accessible từ một quỹ đạo đã cho đều thuộc bao đóng đối đặc trưng của quỹ đạo đó.

2.3.2. Các kết quả chính liên quan đến khái niệm n -accessible. Khái niệm n -accessible giúp

ta mô tả mối liên hệ giữa các quỹ đạo $G(k)$ trong không gian affine V thông qua việc lấy giới hạn theo các đối đặc trưng. Kết quả đầu tiên nói rằng: với mỗi điểm $v \in V$, nếu ta xét quỹ đạo $G(k) \cdot v$, thì trong bao đóng đối đặc trưng của quỹ đạo này, chỉ có duy nhất một quỹ đạo $G(k)$ -đóng đối đặc trưng. Nói cách khác, nếu ta dùng các đối đặc trưng $\lambda \in Y_k(G)$ để lấy giới hạn $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a) \cdot v$, thì tất cả những giới hạn như vậy đều rơi vào cùng một quỹ đạo $G(k)$ -đóng. Kết quả thứ hai là: nếu một quỹ đạo $G(k) \cdot w$ là n -accessible từ quỹ đạo $G(k) \cdot v$, tức là tồn tại một dãy hữu hạn các bước lấy giới hạn đối đặc trưng từ v để đi tới w , thì w sẽ nằm trong bao đóng đối đặc trưng của $G(k) \cdot v$, tức $w \in G(k) \cdot v^{\text{cocharacter}}$. Hai kết quả này cho thấy rằng, quan hệ n -accessible không chỉ phản ánh một quá trình dịch chuyển bằng đối đặc trưng, mà còn giúp ta hiểu cấu trúc của bao đóng đối đặc trưng theo một cách tự nhiên hơn.

2.3.3. Ứng dụng trong lý thuyết bất biến hình học. Lý thuyết bất biến hình học (Geometric Invariant Theory - GIT) cung cấp các công cụ nền tảng để nghiên cứu các quỹ đạo của nhóm tác động lên không gian affine V . Các ứng dụng chính của lý thuyết n -accessible xoay quanh việc xác định quỹ đạo $G(k)$ -đóng và việc mở rộng định lý Hilbert-Mumford trong trường hợp hữu tỉ. Trong việc xác định quỹ đạo $G(k)$ -đóng, khái niệm n -accessible đóng vai trò quan trọng trong việc kiểm chứng sự tồn tại của quỹ đạo $G(k)$ -đóng đối đặc trưng. Việc sử dụng đối đặc trưng $\lambda \in Y_k(G)$ cho phép xác định bao đóng đối đặc trưng của một quỹ đạo thông qua việc xét các phép lấy giới hạn. Cụ thể, nếu $v \in V$ và $\lambda \in Y_k(G)$, thì giới hạn $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a) \cdot v$ xác định một điểm $w \in V$ sao cho $w \in G(k) \cdot v^{\text{cocharacter}}$ nếu quỹ đạo $G(k) \cdot v$ là n -accessible đến w . Như vậy, khái niệm n -accessible cung cấp một phương pháp hiệu quả để kiểm tra xem liệu một điểm cho trước có thuộc bao đóng đối đặc trưng của một quỹ đạo cụ thể hay không, mà không cần phải khảo sát toàn bộ quỹ đạo. Định lý Hilbert-Mumford cổ điển khẳng định rằng, đối với bất kỳ điểm $v \in V$, tồn tại một đối đặc trưng $\lambda \in Y(G)$ sao cho giới hạn $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a) \cdot v$ là một điểm ổn định theo nghĩa hình học trong không gian xạ ảnh. Trong bài báo BHMR, định lý này được mở rộng cho trường hợp hữu tỉ, tức là khi trường cơ sở không phải là đại số đóng. Cụ thể, với mọi điểm $v \in V$, tồn tại một đối đặc trưng $\lambda \in Y_k(G)$ sao cho $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a) \cdot v$ nằm trong quỹ đạo $G(k)$ -đóng đối đặc trưng. Việc mở

rộng này cung cấp một phương pháp để kiểm chứng tính G -hoàn toàn khả quy (G -complete reducibility) thông qua việc nghiên cứu các phép lấy giới hạn đối đặc trưng. Việc sử dụng khái niệm n -accessible cũng mang lại một phương pháp quan trọng trong việc xác định các quỹ đạo $G(k)$ -đóng đối đặc trưng trong không gian affine V . Thông qua định lý Rational Hilbert-Mumford và khái niệm n -accessible, người ta có thể phân tích mối quan hệ giữa các quỹ đạo $G(k)$ -đóng và các quỹ đạo G -đóng trong không gian đó.

2.3.4. Ứng dụng trong lý thuyết nhóm reductive

a. Mối quan hệ giữa G -đóng và $G(k)$ -đóng. Khái niệm n -accessible cho phép mở rộng việc nghiên cứu từ các quỹ đạo G -đóng sang các quỹ đạo $G(k)$ -đóng trong trường hợp trường cơ sở k không đại số đóng. Một quỹ đạo $G(k)$ -đóng không nhất thiết là G -đóng và ngược lại. Việc sử dụng các đối đặc trưng $\lambda \in Y_k(G)$ cùng với giới hạn $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a) \cdot v$ giúp xác định điều kiện để một quỹ đạo $G(k)$ -đóng nằm trong quỹ đạo G -đóng, từ đó mô tả mối quan hệ giữa hai loại quỹ đạo trong không gian affine.

b. Nghiên cứu nhóm con parabolic và Levi. Trong việc phân tích cấu trúc nhóm con của G , khái niệm G -hoàn toàn khả quy cho phép nhận diện các nhóm con nằm trong Levi của một nhóm con parabolic phù hợp. Định lý Hilbert-Mumford hữu tỉ cho biết, với $h \in H^n$ và $\lambda \in Y_k(G)$, nếu $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a) \cdot h$ tồn tại và quỹ đạo $G(k) \cdot h$ là đóng đối đặc trưng, thì nhóm con H là G -hoàn toàn khả quy trên k . Việc này cho thấy vai trò của đối đặc trưng trong việc phân loại các nhóm con của nhóm reductive.

III. KẾT LUẬN

Trong bài báo, tác giả đã trình bày khái niệm n -accessible trong ngữ cảnh của lý thuyết bất biến hình học và lý thuyết nhóm reductive. Thông qua việc áp dụng lý thuyết tính đóng đối đặc trưng và định lý Hilbert-Mumford hữu tỉ, tác giả đã phát triển một cách tiếp cận mới để nghiên cứu tính chất của các quỹ đạo $G(k)$ -đóng và mối quan hệ giữa các quỹ đạo này với bao đóng đối đặc trưng. Tác giả đã khảo sát các nhóm con quan trọng của G , bao gồm nhóm con parabolic, nhóm con Levi và nhóm con unipotent, thông qua việc sử dụng đối đặc trưng λ . Điều này cung cấp một cách nhìn trực quan và tổng quát hơn về cấu trúc của các quỹ đạo trong không gian affine.

Một trong những kết quả quan trọng được trình bày của bài tham luận là sự khẳng định rằng, mọi quỹ đạo $G(k)$ -đóng đối đặc trưng đều tồn tại

duy nhất trong bao đóng đối đặc trưng của một quỹ đạo bất kỳ. Hơn nữa, khái niệm n -accessible đã chứng minh được rằng, mặc dù có mối quan hệ chặt chẽ với bao đóng đối đặc trưng, nó không nhất thiết có tính chất bắc cầu. Điều này đã được minh họa thông qua các ví dụ cụ thể với nhóm $GL_n(k)$ và $SL_n(k)$. Thông qua việc áp dụng định lý Hilbert-Mumford hữu tỉ, tác giả đã chỉ ra

cách kiểm tra tính G -hoàn toàn khả quy của một nhóm con, cũng như xác định điều kiện để một quỹ đạo $G(k)$ -đóng trở thành G -đóng.

Tổng hợp lại, bài tham luận này chủ yếu hướng đến mục tiêu làm rõ khái niệm n -accessible, trình bày các kết quả quan trọng liên quan đến bao đóng đối đặc trưng, và chỉ ra các ứng dụng của lý thuyết này trong lý thuyết bất biến hình học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Michael Bate, Sebastian Herpel, Benjamin Martin, Gerhard Röhrle, Cocharacter-closure and the rational Hilbert–Mumford Theorem, *Mathematische Zeitschrift* (2017).

Michael Bate, Benjamin Martin, Gerhard Röhrle, Rudolf Tange, Closed orbits and uniform S-instability in geometric invariant theory, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 365, No. 7, July 2013, pp. 3643–3673.

David Mumford, John Fogarty, Frances Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, 3rd Edition, Springer-Verlag, 1994.

T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, 2nd Edition, Birkhäuser Boston, 1998.