

CÔNG THỨC TÍNH HỆ SỐ TRONG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON CHO TỔNG NHIỀU SỐ HẠNG

Nguyễn Thị Linh
Khoa Sư phạm, Đại học Thủ Dầu Một

Tóm tắt: Trong bài viết tác giả giới thiệu công thức tính nhanh hệ số của số hạng trong khai triển nhị thức Newton. Đặc biệt công thức của chúng tôi sẽ áp dụng cho khai triển nhị thức Newton của một tổng gồm nhiều số hạng.

Từ khóa: Nhị thức Newton, hệ số trong khai triển nhị thức Newton.

THE FORMULA FOR CALCULATING COEFFICIENTS IN NEWTON'S BINOMIAL THEOREM FOR SUM OF TERMS

Nguyen Thi Linh
Faculty of Education, Thu Dau Mot University

Abstract: In this article, we will introduce a formula for quickly calculating the coefficient of a term in the Newton binomial theorem. In particular, our formula will be applied to the Newton binomial theorem of a sum of terms.

Keywords: Newton's Binomial Theorem, Binomial formula, Binomial coefficient.

Nhận bài: 15/02/2025

Phản biện: 05/03/2025

Duyệt đăng: 09/03/2025

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong chương trình toán học ở bậc phổ thông chúng ta đã được biết đến các khái niệm tổ hợp, chỉnh hợp và những ứng dụng của chúng. Một trong những ứng dụng là khai triển nhị thức Newton, công thức cho phép chúng ta khai triển nhanh được các đa thức có số mũ nguyên lớn hơn hai. Ở công thức này ta chỉ xét khai triển của một tổng có hai số hạng, nên nếu có nhiều hơn chúng ta phải nhóm các số hạng lại để áp dụng. Với mong muốn giúp các bạn học sinh có thể tính toán nhanh hơn, chúng tôi sẽ giới thiệu đến các bạn công thức tính cho tổng nhiều số hạng.

Chúng ta nhắc lại công thức khai triển nhị thức Newton của hai số hạng u và v là

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^k v^{n-k}$$

Ở bài viết nhỏ này chúng ta sẽ đi tìm khai triển nhị thức Newton của các số hạng $u_1, u_2, \dots, u_r$.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Xây dựng công thức

Để đưa ra công thức thì chúng ta sẽ bắt đầu từ khai triển của ba số hạng u_1, u_2, u_3

$$(u_1 + u_2 + u_3)^n = (u_1 + (u_2 + u_3))^n = \sum_{k_1=0}^n C_n^{k_1} u_1^{k_1} (u_2 + u_3)^{n-k_1} = \sum_{k_1=0}^n C_n^{k_1} (a + b)^{n-k_1} C_{n-k_1}^k$$

Ở đây chúng ta lại tiếp tục có một khai triển nhị thức $(u_2 + u_3)^{n-k_1}$

$$(u_2 + u_3)^{n-k_1} = \sum_{k_2=0}^{n-k_1} C_{n-k_1}^{k_2} u_2^{k_2} u_3^{n-k_1-k_2}$$

Thay vào khai triển trên, ta được

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2 + u_3)^n &= \sum_{k_1=0}^n C_n^{k_1} u_1^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{n-k_1} C_{n-k_1}^{k_2} u_2^{k_2} u_3^{n-k_1-k_2} \right) \\ &= \sum_{k_1=0}^n \left(\sum_{k_2=0}^{n-k_1} C_n^{k_1} u_1^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} u_2^{k_2} u_3^{n-k_1-k_2} \right) \\ &= \sum_{k_1=0}^n \left(\sum_{k_2=0}^{n-k_1} C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} u_1^{k_1} u_2^{k_2} u_3^{n-k_1-k_2} \right) \end{aligned}$$

Đặt $k_3 = n - k_1 - k_2$, công thức trở thành

$$(u_1 + u_2 + u_3)^n = \sum_{k_1=0}^n \left(\sum_{k_2=0}^{n-k_1} C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} u_1^{k_1} u_2^{k_2} u_3^{k_3} \right)$$

Chú ý rằng

$$\sum_{k_1=0}^n \left(\sum_{k_2=0}^{n-k_1} A \right) = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} A \quad (A)$$

Điều này được chứng minh dựa vào số lượng số hạng trong khai triển của hai vế đều bằng nhau

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

và bằng

Tiếp theo ta rút gọn hệ số trong khai triển trên

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \times \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$$

Thay vào công thức trên ta được công thức sau cùng

$$(u_1 + u_2 + u_3)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} u_1^{k_1} u_2^{k_2} u_3^{k_3}$$

Chú ý với khai triển Newton cho hai số hạng u_1, u_2 thì bằng cách đặt $k_2 = n - k_1$ ta cũng được công thức trên

Ta mở rộng công thức tính khai triển nhị thức Newton cho t số hạng: $u_1, u_2, \dots, u_t$

$$(u_1 + u_2)^n = \sum_{k_1}^n C_n^{k_1} u_1^{k_1} u_2^{n-k_1} = \sum_{k_1+k_2=n} \frac{n!}{k_1! k_2!} u_1^{k_1} u_2^{k_2}$$

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_t)^{(n)} = \sum_{k_1 + \dots + k_t = n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_{t-1}! k_t!} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_{t-1}^{k_{t-1}} u_t^{k_t}$$

Ta chứng minh công thức đúng cho t số hạng. Ta có

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2 + \dots + u_{t-1} + u_t)^{(n)} &= \sum_{k+k_t=n} \frac{n!}{k! k_t!} (u_1 + u_2 + \dots + u_{t-1})^k u_t^{k_t} \\ &= \sum_{k+k_t=n} \frac{n!}{k! k_t!} \left[\sum_{k_1 + \dots + k_{t-1}=k} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_{t-1}!} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_{t-1}^{k_{t-1}} \right] u_t^{k_t} \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_t = n} \frac{n!}{k! k_t!} \times \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_{t-1}!} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_{t-1}^{k_{t-1}} u_t^{k_t} \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_t = n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_{t-1}! k_t!} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_{t-1}^{k_{t-1}} u_t^{k_t} \end{aligned}$$

Như vậy công thức đã được chứng minh xong.
Sau đây là một số ví dụ minh họa áp dụng công thức trên.

Ví dụ 1: Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển nhị thức Newton $(2x+3x^2)^5$

Giải. Theo công thức trên thì

$$(2x + 3x^2)^5 = \sum_{k_1+k_2=5} \frac{5!}{k_1! k_2!} (2x)^{k_1} (3x^2)^{k_2} = \sum_{k_1+k_2=5} \frac{5!}{k_1! k_2!} 2^{k_1} 3^{k_2} x^{k_1+2k_2}$$

Số hạng chứa x^7 nên $k_1+2k_2=7$, do đó ta có hệ

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 5 \\ k_1 + 2k_2 = 7 \end{cases}$$

Hệ này cho ta kết quả $(k_1; k_2) = (3; 2)$. Như vậy hệ số của số hạng chứa x^7 là

$$\frac{5!}{3! 2!} 2^3 3^2 = 720$$

Ví dụ 2: Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Newton $(2+x+x^2)^3$

Giải. Theo công thức trên thì

$$(2 + x + x^2)^6 = \sum_{k_1+k_2+k_3=6} \frac{6!}{k_1! k_2! k_3!} 2^{k_1} x^{k_2} (x^2)^{k_3} = \sum_{k_1+k_2+k_3=6} \frac{6!}{k_1! k_2! k_3!} 2^{k_1} x^{k_2+2k_3}$$

Số hạng chứa x^4 nên $k_2+2k_3=4$, do đó ta có hệ

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 6 \\ k_2 + 2k_3 = 4 \end{cases}$$

Hệ này cho ta các kết quả

$$(k_1; k_2; k_3) = \{(4; 0; 2); (3; 2; 1); (2; 4; 0)\}$$

Như vậy hệ số của số hạng chứa x^4 là

$$\frac{6!}{4! 0! 2!} 2^4 + \frac{6!}{3! 2! 1!} 2^3 + \frac{6!}{2! 4! 0!} 2^2 = 780$$

III. KẾT LUẬN

Công thức trên cho chúng ta một công thức đẹp để tìm hệ số cho từng số hạng trong biểu thức khai triển nhị thức Newton hoặc nhóm nhanh các nhóm số hạng có chung một đặc điểm nào đó mà không cần tính hết số hạng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đỗ Đức Thái (2022), *Sách Toán 10 tập 2 (Cánh Diều)*, NXB GD Việt Nam.

[2] Trần Nam Dũng (chủ biên) (2022), *Sách Toán 10 tập 2 (Chân trời mới)*, NXB GD Việt Nam.