

TÌM HIỂU CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES THÔNG QUA PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC KHÁM PHÁ CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG

Huỳnh Thị Thu Duyên, Đỗ Vũ Nhật An, Nguyễn Thanh Nhã, Bùi Quang Thịnh
Trường ĐH Tiền Giang

Tóm tắt: *Dạy học khám phá là một phương pháp giáo dục tích cực, khuyến khích người học đưa ra câu hỏi và tự tìm ra câu trả lời, hay rút ra những nguyên tắc từ những ví dụ hay kinh nghiệm thực tiễn. Bài viết này trình bày một tình huống sư phạm được thiết kế nhằm mục tiêu củng cố năng lực vận dụng kiến thức xác suất cho học sinh lớp 12; tập trung vào việc hướng dẫn học sinh sử dụng các khái niệm cốt lõi như xác suất có điều kiện, quy tắc Bayes và các công thức liên quan để giải quyết các bài toán thực tiễn. Thông qua đó, học sinh sẽ được khám phá và phân tích cách xác suất của một biến cố thay đổi khi có thêm thông tin bổ sung, từ đó phát triển tư duy thống kê và khả năng suy luận dựa trên dữ liệu. Phương pháp dạy học khám phá không chỉ cung cấp kiến thức nền tảng vững chắc về xác suất mà còn giúp học sinh làm quen với các phương pháp phân tích, chú trọng đến việc phát triển khả năng diễn giải kết quả và vận dụng kiến thức xác suất vào các ngữ cảnh đa dạng. Bên cạnh đó, phương pháp này còn giúp học sinh phát triển các năng lực toán học quan trọng, phù hợp với Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018, đồng thời khơi dậy sự hứng thú và định hướng nghề nghiệp trong các lĩnh vực như trí tuệ nhân tạo, khoa học dữ liệu và quản lý rủi ro dựa trên dữ liệu.*

Từ khóa: *Dạy học khám phá, Xác suất, Phát triển năng lực, Dạy học tích cực*

LEARNING THE TOTAL PROBABILITY FORMULA AND THE BAYES FORMULA THROUGH DISCOVERY TEACHING METHOD FOR HIGH SCHOOL STUDENTS

Huỳnh Thị Thu Duyên, Do Vu Nhat An, Nguyen Thanh Nha, Bui Quang Thinh
Tien Giang University

Abstract: *Discovery learning is an active educational approach that encourages learners to pose questions and find answers independently, or to derive principles from practical examples and experiences. This article presents a pedagogical scenario designed to strengthen the ability of 12th-grade students to apply probability knowledge. It focuses on guiding students to utilize core concepts such as conditional probability, Bayes' theorem, and related formulas to solve real-world problems. Through this, students will explore and analyze how the probability of an event changes when additional information is introduced, thus developing statistical thinking and data-driven reasoning skills. The discovery learning method not only provides a strong foundation in probability but also familiarizes students with analytical methods, emphasizing the development of their capacity to interpret results and apply probabilistic knowledge in diverse contexts. Furthermore, this approach helps students develop crucial mathematical competencies aligned with the 2018 General Education Curriculum, while also fostering their interest and career orientation in fields like artificial intelligence, data science, and data-driven risk management.*

Keywords: *Discovery Learning, Probability, Competency Development, Active Learning*

Nhận bài: 16/12/2024

Phản biện: 06/01/2025

Duyệt đăng: 10/01/2025

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Thống kê và Xác suất là một nội dung bắt buộc của môn Toán theo chương trình giáo dục phổ thông 2018, góp phần tăng cường tính ứng dụng và giá trị thiết thực của kiến thức Toán học. Trong chương trình môn Toán lớp 12, các yêu cầu cần đạt đối với nội dung Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes là mô tả được xác suất toàn phần, công thức Bayes; sử dụng được công thức Bayes để tính xác suất có điều kiện và vận dụng vào một số bài toán thực tiễn [1]. Đây là một nội dung phức tạp nhưng rất quan trọng và có ý nghĩa thực tiễn rất lớn, có thể áp dụng nhiều trong đời sống hiện đại; đòi hỏi mỗi giáo viên cần phải nỗ lực rất nhiều và vận dụng nhiều phương pháp dạy học tích cực trong quá trình giảng dạy cho học sinh [2].

Phương pháp giáo dục truyền thống thường chú trọng vào việc giảng dạy lý thuyết, ít tập trung vào thực hành và ứng dụng thực tế, dẫn đến học sinh khó khăn trong việc vận dụng kiến thức đã học vào đời sống. Ngược lại, phương pháp dạy học khám phá phục được hạn chế này; tạo ra một môi trường học tập tương tác, nơi học sinh có cơ hội phát triển kỹ năng tự học và giải quyết vấn đề một cách hiệu quả [3].

Bài viết trình bày về nội dung vận dụng phương pháp dạy học khám phá vào dạy học Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes trong chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, dựa trên bộ sách Chân trời sáng tạo. Nội dung bài viết bao gồm ba mục chính: Mục 2.1. Giới thiệu phương pháp dạy học khám phá. Mục 2.2. trình

bày chi tiết về tình huống “Ứng dụng công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes trong chẩn đoán bệnh” trong chương trình giảng dạy xác suất dành cho học sinh lớp 12. Cuối cùng, mục 3. kết luận về những đóng góp và hiệu quả của nghiên cứu này.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Phương pháp dạy học khám phá

2.1.1. Một số nhận định về dạy học khám phá

Dạy học khám phá là một phương pháp dạy học khuyến khích người học đưa ra câu hỏi và tự tìm ra câu trả lời hay rút ra những nguyên tắc từ những ví dụ, kinh nghiệm thực tiễn. Dạy học khám phá có thể được hiểu như một tình huống học tập trong đó nội dung chính cần được học không được giới thiệu trước mà phải tự khám phá bởi người học, làm cho người học là người tham gia tích cực vào quá trình học [3].

Việc đặt câu hỏi bao gồm nhiều hình thức khác nhau như tự đặt câu hỏi & trả lời, thiết kế hoặc kiểm tra-nhận xét về các câu hỏi của người học khác. Việc thiết kế câu hỏi cho người học là một chiến lược thực tế hơn nhưng ít được thực hành trong quá trình dạy-học. Điều cần thiết là khuyến khích việc đặt câu hỏi để người học phát triển tư duy và lý luận. Việc đặt câu hỏi còn thúc đẩy người học suy nghĩ về chủ đề, tạo ra những liên kết mới giữa kiến thức cũ và kiến thức mới, đồng thời so sánh các thông tin tự phản hồi và được phản hồi từ người khác [4].

Một số nhà nghiên cứu cho rằng dạy học khám phá quan hệ mật thiết với phương pháp giải quyết vấn đề: người học phải biết nhận ra vấn đề, tìm kiếm thông tin liên quan, tìm kiếm chiến lược giải, thực hiện được chiến lược giải [5].

Một số ưu điểm của phương pháp dạy học khám phá

Dạy học khám phá có nhiều ưu thế so với dạy học truyền thống [4], bao gồm:

Phát triển tư duy sáng tạo: Khuyến khích học sinh tự tìm tòi, đặt câu hỏi và giải quyết vấn đề, giúp nâng cao khả năng tư duy phân biện và sáng tạo.

Tăng cường tính chủ động: Học sinh trở thành trung tâm của quá trình học tập, tự chịu trách nhiệm với việc tiếp thu kiến thức thay vì chỉ thụ động tiếp nhận.

Gắn kết thực tiễn: Phương pháp này thường kết hợp với các tình huống thực tế, giúp học sinh dễ dàng liên hệ và áp dụng kiến thức vào cuộc sống.

Nâng cao động lực học tập: Việc tham gia tích cực vào quá trình khám phá giúp học sinh cảm

thấy hứng thú hơn, từ đó cải thiện kết quả học tập.

Phát triển kỹ năng mềm: Học sinh được rèn luyện kỹ năng hợp tác, giao tiếp và làm việc nhóm thông qua các hoạt động tìm hiểu và trao đổi.

Như vậy, phương pháp dạy học khám phá không chỉ cung cấp kiến thức nền tảng vững chắc mà còn giúp người học làm quen với các phương pháp phân tích, chú trọng đến việc phát triển khả năng diễn giải kết quả và vận dụng kiến thức đã học vào các ngữ cảnh đa dạng.

Tình huống “Ứng dụng công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes trong chẩn đoán bệnh”

Ở nội dung dạy học khám phá, người thầy sẽ đóng vai trò như một chuyên gia đầu ngành, giao phó nhiệm vụ cho các “bác sĩ thực tập” - chính là những học sinh trong lớp dự đoán khả năng thật sự mắc bệnh của mỗi người khi có triệu chứng ho và sốt. Từ đó giúp học sinh hình thành công thức Bayes và giải quyết được các vấn đề toán học liên quan đến thực tế. Chẳng hạn: “Hiện nay, ở Trung Quốc xuất hiện một chứng bệnh mới có tên là cúm HMPV. Biết rằng cứ 20 người đi khám bệnh thì có 5 người mắc cúm HMPV. Theo thông tin của Bộ Y tế, một người mắc cúm HMPV thường có các triệu chứng như ho, sốt, sổ mũi, đau đầu, ... Trong đó triệu chứng thường gặp nhất là ho và sốt.”

2.2.1. Xác định nhiệm vụ và nhận thức

Giả sử lớp học có 40 học sinh. Giáo viên chia lớp thành 2 nhóm, mỗi nhóm có 20 học sinh. Từng nhóm là một phòng khám có 20 người, trong đó mỗi học sinh đóng vai trò là bác sĩ chẩn đoán và cũng là bệnh nhân. Giáo viên là một bác sĩ hướng dẫn nhóm “bác sĩ thực tập” của 2 phòng khám.

Giáo viên chuẩn bị cho mỗi nhóm các thẻ: Bệnh: 5 thẻ và Không bệnh: 15 thẻ. Nhưng giáo viên dùng băng keo dán kết quả bệnh và không bệnh, cụ thể như sau:

Nhóm 1: 5 thẻ bệnh có: 3 thẻ có triệu chứng: "Ho và sốt" và 15 thẻ không bệnh và có 7 thẻ có triệu chứng "Ho và sốt".

Nhóm 2: 5 thẻ bệnh có: 4 thẻ có triệu chứng: "Ho và sốt" và 15 thẻ không bệnh và có 6 thẻ có triệu chứng "Ho và sốt".

Học sinh tiếp nhận tình huống, chia lớp thành 2 nhóm và nhận “thẻ bệnh” của mình. Kết quả mong đợi của giáo viên đối với pha thử nhất là học sinh chia được nhóm, chọn trưởng nhóm để nhận nhiệm vụ từ giáo viên và tích cực tiến hành các nhiệm vụ được giao.

Học sinh hoạt động theo nhóm để trả lời các câu hỏi của giáo viên/nhóm khác.

H1: Khi bước vào phòng khám, khả năng của mỗi bạn mắc bệnh là bao nhiêu?

L1: Dựa trên giả thiết ban đầu của tình huống và áp dụng công thức cổ điển đã học, học sinh tính được: Khả năng mắc bệnh của mỗi người là $5/20=0.25$. Tức là 25%.

H2: Nếu chọn ngẫu nhiên một người. Tính xác suất người được chọn có triệu chứng ho và sốt?

H3: Chọn ngẫu nhiên một người, tính xác suất người được chọn bị bệnh biết rằng người đó có triệu chứng ho và sốt.

L2 + L3: Không thể tính xác suất trực tiếp được vì không biết có bao nhiêu người có triệu chứng ho và sốt.

H4: Đó có phải khả năng một người thật sự mắc bệnh trước khi vào phòng khám không? Vậy các triệu chứng thường gặp khi mắc bệnh là gì?

L4: Học sinh sẽ nhầm lẫn rằng 25% là khả năng thật sự mắc bệnh nhưng đó là câu trả lời không đúng => xuất hiện tình huống có vấn đề.

=> Kết quả mong đợi là học sinh tính được khả năng mắc bệnh của mỗi người trước khi đến phòng khám

2.2.2 Tìm tòi, khám phá

GV: Biết rằng những người có triệu chứng ho và sốt thì khả năng người đó bị bệnh sẽ rất cao, vì thế các bạn hãy sàng lọc những người có triệu chứng ho và sốt.

HS: Sau khi sàng lọc các bạn và tìm ra những bạn có triệu chứng ho và sốt. Có tất cả 10 bạn có triệu chứng.

H5: Bây giờ bác sĩ chuyên gia cần chọn 1 người và đi khám sàng lọc, tính xác suất người được chọn có triệu chứng ho và sốt.

Gợi ý: Gọi A là biến cố “người được chọn có triệu chứng ho và sốt”.

L5: Xác suất của biến cố A là: $P(A)=10/20=0.5$.

H6: Có phải 10 người có triệu chứng ho và sốt là bị mắc cúm HMPV hay không?

L6: Không phải 10 người có triệu chứng ho và sốt đều mắc cúm HMPV.

=> GV: Để biết chính xác ai thật sự mắc cúm HMPV trong những người có triệu chứng ho và sốt thì cần xét nghiệm máu. Sau khi có kết quả xét nghiệm thì ở nhóm 1 có 3 người trong 10 người có triệu chứng ho và sốt mắc cúm HMPV và ở nhóm 2 có 4 người trong 10 người có triệu chứng ho và sốt mắc cúm HMPV. Nhưng không may, bác sĩ quên đánh dấu mẫu xét nghiệm, vì thế chỉ biết số người mắc cúm HMPV chứ không thể biết chính xác người đó là ai. Do phòng khám chật chội và

thời gian tiếp xúc của người có bệnh và không bệnh đủ điều kiện lây lan nên chuyên gia bắt buộc phải chọn ra ngẫu nhiên từng người để xét nghiệm và đưa đi cách li, điều trị.

H7: Tính xác suất người được chọn mắc bệnh biết rằng người đó có triệu chứng ho và sốt”.

Gợi ý: Gọi B là biến cố “người được chọn mắc cúm HMPV”. Suy ra \bar{B} là biến cố “người được chọn mắc cúm HMPV”.

Để tính được câu này học sinh biết được tổng số người có triệu chứng ho và sốt ở mỗi nhóm đều là 10 người. Biết rằng trong 10 người ở nhóm 1 có người mắc cúm HMPV và trong 10 người ở nhóm 2 có 4 người mắc cúm HMPV.

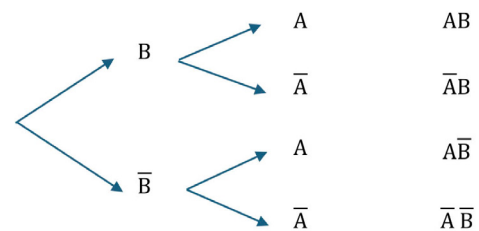
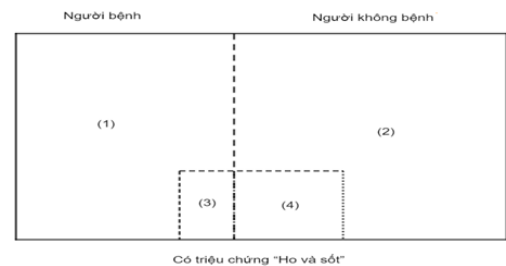
L7: Ta có $B|A$ là biến cố “người được chọn mắc cúm HMPV biết rằng người đó có triệu chứng ho và sốt”.

Nhóm 1: $P(B | A)=3/10$ và Nhóm 2: $P(B | A)=4/10$

2.2.3. Giải thích

GV: Dẫn dắt và hướng dẫn hình thành công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes: “Trong y học, khả năng ban đầu của một người mắc bệnh rất là thấp, nhưng sau khi có một triệu chứng liên quan tới bệnh thì khả năng mắc bệnh càng tăng cao. Nếu thêm nhiều triệu chứng hơn thì tỉ lệ mắc bệnh sẽ cao hơn.” Quay lại bài toán: theo công bố thì khả năng mắc bệnh là 25%, nhưng khả năng mắc bệnh khi người bệnh có triệu chứng “ho và sốt” thì khả năng mắc bệnh cúm HMPV xấp xỉ 33.33% và 40%.

Khái quát bằng sơ đồ cây hoặc hình chữ nhật:



Nếu chọn ngẫu nhiên một người. Gọi A là biến cố “ Người đó có triệu chứng ho và sốt”, B là “Người đó mắc bệnh”, và \bar{B} là “người đó không

mắc bệnh”. Ta thấy hình (1) là tổng số người bệnh. (2) là tổng số người không bệnh. (3) là số người bệnh và có triệu chứng “ho và sốt”. (4) là số người không bị bệnh và có triệu chứng “ho và sốt”. Khi đó biến cố A là hình chữ nhật nét đứt (3)+(4) là biến cố “người được chọn có triệu chứng ho và sốt”.

GV: Đặt những câu hỏi gợi mở để học sinh trả lời và dần hình thành công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes.

- Tỷ lệ chọn đúng người mắc bệnh, $P(B) = \frac{(1)}{(1)+(2)}$.
- Tỷ lệ chọn được người không bệnh $P(\bar{B}) = \frac{(2)}{(1)+(2)}$.
- Tỷ lệ chọn được người có triệu chứng ho và sốt:

$$P(A) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{(3)+(4)}{(1)+(2)}$$

- Ta cũng có thể tính tỉ lệ chọn được người có triệu chứng ho và sốt bằng cách.

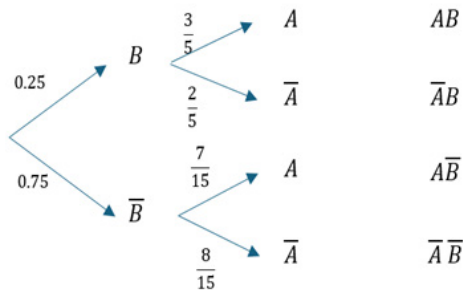
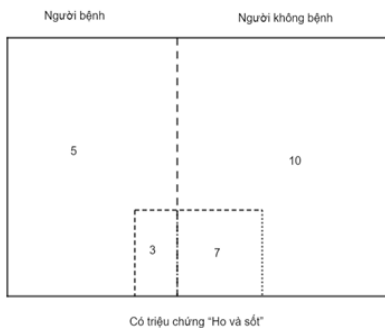
$$P(A) = \frac{(1)}{(1)+(2)} \cdot \frac{(3)}{(1)} + \frac{(2)}{(1)+(2)} \cdot \frac{(4)}{(2)} = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

Đây là công thức xác suất toàn phần (công thức xác suất đầy đủ).

2.2.4. Áp dụng

H8: Học sinh hoàn thành điền số vào hình và tính $P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(A|B)$, $P(A|\bar{B})$, $P(A)$.

Nhóm 1:

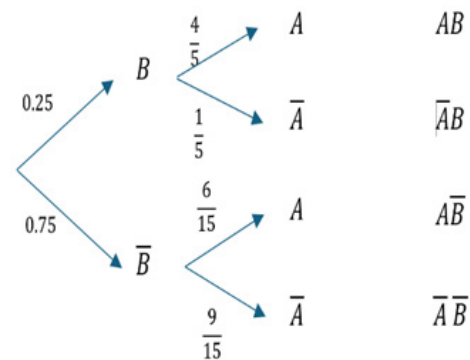
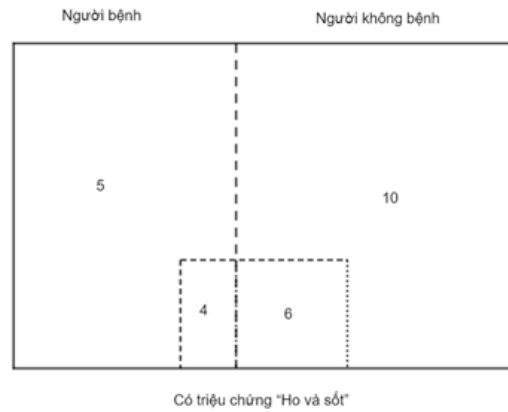


$$P(B) = 0.25; \quad P(\bar{B}) = 1 - 0.25 = 0.75;$$

$$P(A|B) = \frac{3}{5}; \quad P(A|\bar{B}) = \frac{7}{15};$$

$$\Rightarrow P(A) = 0.25 \cdot \frac{3}{5} + 0.75 \cdot \frac{7}{15} = 0.5$$

Nhóm 2:



$$P(B) = 0.25; \quad P(\bar{B}) = 1 - 0.25 = 0.75;$$

$$P(A|B) = \frac{4}{5}; \quad P(A|\bar{B}) = \frac{6}{15};$$

$$\Rightarrow P(A) = 0.25 \cdot \frac{4}{5} + 0.75 \cdot \frac{6}{15} = 0.5$$

=> GV: Khi đã biết khả năng chọn được người có triệu chứng. Ta tiếp tục thực hiện tính biến cố: Người được chọn bị bệnh biết rằng người đó có triệu chứng. Tức là tính

$$P(B|A). \text{ Với } P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}).$$

Nhóm 1: Theo công thức xác suất có điều kiện:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot \frac{3}{5}}{0.5} = \frac{3}{10}$$

Nhóm 2: Theo công thức xác suất có điều kiện:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot \frac{4}{5}}{0.5} = \frac{4}{10}$$

GV: Từ công thức xác suất có điều kiện giáo viên giới thiệu công thức Bayes.

2.2.4. Đánh giá

Tổ chức cho học sinh báo cáo kết quả, các nhóm nhận xét đánh giá kết quả hoạt động của các nhóm thông qua sản phẩm thực hiện.

Sau đó giáo viên nhận xét, đánh giá, chốt kiến thức chuẩn cho học sinh

III. KẾT LUẬN

Tình huống dạy học khám phá đã chứng minh hiệu quả trong việc giúp học sinh đạt được các mục tiêu của Chương trình Giáo dục Phổ thông môn Toán 2018. Học sinh có cơ hội hợp tác, học hỏi lẫn nhau và tiếp thu kiến thức mới một cách chủ động. Giáo viên đóng vai trò người điều phối, hướng dẫn học sinh xây dựng kiến thức thông qua các hoạt động minh bạch, hấp dẫn và theo từng bước. Phương pháp này không chỉ giúp học sinh xác định vấn đề mà còn phân tích dữ liệu, thảo

luận nhóm và tự rút ra kết luận.

Học sinh hiểu rõ ý nghĩa thực tiễn của công thức Xác suất toàn phần và công thức Bayes, từ đó tăng cường hứng thú học tập. Việc ứng dụng thực tế giúp học sinh phát triển tư duy phân biện, kỹ năng phân tích tình huống, thay vì học thuộc công thức. Kết quả là học sinh đạt được các yêu cầu về kiến thức và kỹ năng theo chương trình, cho thấy sự thành công của phương pháp dạy học khám phá trong việc nâng cao chất lượng giáo dục toán học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018), *Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018)*, Hà Nội.
- Lê Thị Hoài Châu (2012), *Dạy học Xác suất-Thống kê ở trường phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh
- Nguyễn Bá Kim (2017), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm.
- Nguyễn Lăng Bình (Chủ biên) và Đỗ Hương Trà (2022), *Dạy và học tích cực một số phương pháp và kỹ thuật dạy học*, NXB Đại học Sư phạm.
- Rodriguez-Sanchez, Cristina, et al, (2024), *Insights 4.0: Transformative learning in industrial engineering through problem-based learning and project-based learning*. *Computer Applications in Engineering Education* (2024): e22736.