ỨNG DỤNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH GIẢI CÁC BÀI TẬP VẬT LÝ, HÓA HỌC

Đỗ Thị Ngọc Dương
Trường Đại học Công Nghệ Đồng Nai

Tóm tắt: *Việc áp dụng các hệ phương trình tuyến tính để xử lý các bài toán trong vật lý và hóa học góp phần tối ưu hóa và đơn giản hóa độ phức tạp của các phép tính và bảo đảm độ chính xác cao. Bài báo tìm hiểu cách thức ứng dụng các hệ phương trình tuyến tính để giải các bài toán trong những lĩnh vực này, cụ thể là việc sử dụng phương pháp Gauss để giải các hệ phương trình với ít nhất bốn ẩn. Hệ phương trình tuyến tính đảm nhận chức năng quan trọng trong quá trình cân bằng các phương trình hóa học, xác định công thức phân tử, phân tích mạch điện và nghiên cứu chuyển động trong cơ học cổ điển. Phương pháp Gauss giúp chuyển đổi ma trận hệ số sang dạng bậc thang, tạo điều kiện giải quyết hiệu quả các hệ phương trình phức tạp. Sử dụng hệ phương trình tuyến tính trong giảng dạy vật lý và hóa học không chỉ giúp sinh viên nắm vững các khái niệm toán học mà còn cải thiện khả năng ứng dụng chúng vào thực tế.*

***Từ khóa**: Hệ phương trình tuyến tính, Phương pháp Gauss, Vật lý, Hóa học, Bài toán thực tế, Mô hình hóa toán học*

APPLICATION OF LINEAR EQUATIONS IN SOLVING PHYSICS AND CHEMISTRY PROBLEMS

Do Thi Ngoc Duong
Dong Nai Technology University

Abstract: *The application of linear systems of equations to solve problems in physics and chemistry contributes to optimizing and simplifying the complexity of calculations while ensuring high accuracy. This paper explores the use of linear systems of equations to solve problems in these fields, specifically focusing on the use of the Gauss method to solve systems with at least four variables. Linear systems of equations play a crucial role in balancing chemical equations, determining molecular formulas, analyzing electrical circuits, and studying motion in classical mechanics. The Gauss method helps transform the coefficient matrix into row echelon form, facilitating the efficient solution of complex systems of equations. Using linear systems of equations in teaching physics and chemistry not only helps students grasp mathematical concepts but also enhances their ability to apply these concepts in real-world scenarios.*

Keywords: *Linear Systems of Equations, Gaussian Method, Physics, Chemistry, Practical Problems, Mathematical Modeling*

Nhận bài: 11/12/2024 Phản biện: 04/01/2025 Duyệt đăng: 09/01/2025

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Đổi mới phương pháp dạy học nhằm nâng cao chất lượng đào tạo giáo dục đại học là điều kiện cần thiết để phát triển nguồn nhân lực chất lượng cao đáp ứng nhu cầu xã hội. Xuất phát từ yêu cầu giảng dạy phải đáp ứng chuẩn đầu ra của học phần và đáp ứng chuẩn đầu ra của chương trình đào tạo đòi hỏi phương pháp dạy học phải chuyển trọng tâm từ giáo dục tiếp cận nội dung sang tiếp cận năng lực của người học, tức là thay vì đánh giá sinh viên học được gì, chúng ta đánh giá khả năng vận dụng kiến thức của sinh viên sau quá trình học.

Toán học là một trong những học phần khoa học cơ bản mang tính trừu tượng có liên hệ mật thiết với thực tiễn. Một trong những cách tốt nhất để thu hút SV hứng thú và tích cực hơn trong học tập các học phần toán học là tạo cho SV cơ hội áp dụng toán vào thực tiễn, tức là toán học hóa các vấn đề thực tiễn bằng ngôn ngữ toán học. Nhờ vậy, sinh viên không chỉ xây dựng nền tảng kiến thức vững chắc mà còn có khả năng áp dụng kiến thức đã học vào thực tế.

Hệ phương trình tuyến tính góp phần tối ưu hóa và đơn giản hóa độ phức tạp của các bài toán và bảo đảm độ chính xác cao. Cụ thể, trong vật lý và hóa học, chúng đóng vai trò thiết yếu trong việc giải các bài toán, góp phần nâng cao khả năng phân tích và dự đoán các hiện tượng tự nhiên. Trong phạm vi của bài báo, chúng tôi ứng dụng phương pháp giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình trong toán học để mô hình hóa các bài tập vật lý và hóa học về dạng hệ phương trình tuyến tính sau đó sử dụng phương pháp Gauss để tìm nghiệm của các hệ phương trình này.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1 Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss

Hệ m phương trình có n ẩn $x_1, x_2, ..., x_n$ gọi là hệ phương trình tuyến tính. Để giải hệ phương trình theo phương pháp Gauss, ta đưa hệ về dạng ma trận:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Khi đó, hệ phương trình có dạng như sau:

$A.X = B$. Việc lựa chọn phương pháp để giải một hệ phương trình tuyến tính phụ thuộc vào các phương trình và biến cụ thể liên quan. Trong bài báo chúng tôi sử dụng phương pháp khử Gauss để giải các hệ phương trình lớn từ bốn biến trở lên. Phương pháp này biến đổi một hệ phức tạp về một hệ đơn giản hơn trong đó ma trận hệ số của nó có dạng ma trận bậc thang. Các bước để thực hiện quá trình này gồm:

Bước 1: Viết ma trận $\left(A|B\right)$ bằng cách thêm vào bên phải của ma trận A cột hệ số tự do B

Bước 2: Biến đổi ma trận $\left(A|B\right)$ về ma trận $\overline{\text{A}}$ có dạng bậc thang thông qua các phép biến đổi sơ cấp

Bước 3: Giải hệ $\overline{\text{A}}$ bằng cách khử dần các ẩn từ phương trình cuối cùng trở lên phương trình đầu tiên.

2.2 Giải bài toán vật lý, hóa học bằng phương pháp lập hệ phương trình tuyến tính

Trong vật lý và hóa học có rất nhiều bài toán mà các đại lượng có liên quan đến nhau, việc tìm ra các giá trị chưa biết từ các yếu tố đã cho là một yêu cầu quan trọng. Phương pháp lập hệ phương trình tuyến tính đã chứng minh hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán này. Trước hết ta cần toán học hóa lời bài toán thành các phương trình từ các dữ liệu đầu vào, từ đó xác định các giá trị cần tìm. Cách làm này không chỉ tối ưu hóa quá trình tính toán mà còn mang lại sự chính xác và tiết kiệm thời gian. Sau đây là các bước cần tiến hành để tiếp cận các bài toán bằng phương pháp này:

Bước 1: Lập hệ phương trình

- Xác định các ẩn số trong bài toán và gán các biến x,y,z…để biểu diễn chúng;
- Dựa vào dữ kiện đề bài để thiết lập các phương trình liên quan đến các biến;
- Viết ra tất cả các phương trình đã lập tạo thành một hệ phương trình.

Bước 2: Giải hệ phương trình tuyến tính vừa lập (trong phạm vi bài báo chúng tôi sử dụng phương pháp Gauss)

Bước 3: Kiểm tra các nghiệm vừa tìm được có thỏa mãn điều kiện đặt ra để tìm ra nghiệm thích hợp cho bài toán và kết luận.

Để giải một bài tập hóa học thì cân bằng phương trình phản ứng là nhiệm vụ đầu tiên. Một trong những cách để cân bằng phương trình là thiết lập một hệ phương trình tuyến tính. Các hệ phương trình này giúp xác định các hệ số phản ứng một cách chính xác, đảm bảo rằng phản ứng diễn ra theo đúng tỷ lệ và bảo toàn khối lượng.

Bài toán 1: Cân bằng phương trình sau:

$$HNO_3 + HCl \rightarrow NO + Cl_2 + H_2O$$

Giải:

Gọi x, y, z, t, k lần lượt là hệ số của HNO_3, HCl, NO, Cl_2, H_2O. Điều kiện: x, y, z, t, k phải là các số nguyên dương sao cho:

$$xHNO_3 + yHCl \rightarrow zNO + tCl_2 + kH_2O\ .$$

Phương trình cân bằng đòi hỏi số nguyên tử ở hai vế phải bằng nhau, tức là:

$$\begin{cases} x+y=2k \\ x=z \\ 3x=z+k \\ y=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2k=0 \\ x-z=0 \\ 3x-z-k=0 \\ y-2t=0 \end{cases}$$

Thiết lập hệ phương trình về dạng ma trận:

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Để đưa ma trận trên về dạng bậc thang, ta thực hiện:

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{h_3 \leftrightarrow h_3 - 3h_1}{\overset{h_2 \leftrightarrow h_2 - h_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{h_4 \leftrightarrow h_4 + h_2}{\overset{h_3 \leftrightarrow h_3 - 3h_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{h_3 \leftrightarrow h_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{h_4 \leftrightarrow h_4 + 2h_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Từ ma trận bậc thang thu được, suy ra hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y \qquad\qquad -2k=0 \\ \quad -y \; -z \qquad +2k=0 \\ \qquad\quad -z-2t \; +2k=0 \\ \qquad\qquad\quad -4t+3k=0 \end{cases}$$

Từ phương trình cuối $-4t+3k=0$ suy ra $k=\dfrac{4t}{3}$. Thế vào phương trình thứ 3, ta được: $-z-2t+2.\dfrac{4t}{3}=0$ hay $z=\dfrac{2t}{3}$. Thay $z=\dfrac{2t}{3}$ và $k=\dfrac{4t}{3}$ vào phương trình thứ 2, ta có $y=2t$. Cuối cùng, thế $y=2t.$ và $k=\dfrac{4t}{3}$ vào phương trình đầu tiên, ta được $x=\dfrac{2t}{3}$. Vì các hệ số của phương trình hóa học là các số nguyên dương nên chọn t = 3. Khi đó thu được: $x=2, y=6, z=2, t=3, k=4$. Phương trình có dạng cân bằng như sau:

$$2HNO_3+6HCl \to 2NO+3Cl_2+4H_2O.$$

Hệ phương trình tuyến tính còn được sử dụng để xác định thành phần nguyên tố từ dữ liệu phân tích hóa học. Thông qua việc thiết lập mối quan hệ giữa phần trăm khối lượng và số mol, hệ phương trình giúp tính toán chính xác công thức của hợp chất.

Bài toán 2: Phân tử AB_3 có tổng số hạt là 238 hạt, trong đó số hạt không mang điện ít hơn số hạt mang điện là 70 hạt. Số khối của A nhiều hơn số khối của B là 21. Tổng số hạt (p, n, e) trong A^{3+} nhiều hơn B^- là 26. Xác định A và B.

Giải:

Để xác định được A và B, ta cần xác định được số điện tích hạt nhân Z của các nguyên tố này. Mặt khác số Z cũng chính là số hạt proton và số electron là các hạt mang điện, hạt không mang điện là neutron.

Đặt x là là số điện tích hạt nhân Z và y số neutron của nguyên tử A;

k số Z và t là số neutron của nguyên tử B.

Điều kiện: x, y, k, t là những số nguyên dương.

Từ các dữ kiện của bài toán, ta thiết lập các phương trình đối với các ẩn:

- Tổng số hạt trong phân tử AB_3 là 238 hạt nên ta có $2x+y+3(2k+t)=238$
- Số hạt không mang điện ít hơn số hạt mang điện là 70 $\Leftrightarrow y+3t+70=2x+6k$
- Số khối của A nhiều hơn B là 21: $x+y-(k+t)=21$
- $A^{3+} \to M-3e;\ A^- \to N+e$ và tổng số hạt trong A^{3+} nhiều hơn B^- là 26 nên

$$2x+y-3-(2k+t+1)=26$$

Hệ phương trình thu được:

$$\begin{cases} 2x+y+3(2k+t)=238 \\ y+3t+70=2x+6k \\ x+y-(k+t)=21 \\ 2x+y-3-(2k+t+1)=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+6k+3t=238 \\ 2x-y+6k-3t=70 \\ x+y-k-t=21 \\ 2x+y-2k-t=30 \end{cases}$$

Viết hệ phương trình dưới dạng ma trận:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 6 & 3 & 238 \\ 2 & -1 & 6 & -3 & 70 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 21 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 30 \end{array}\right)$$

Thực hiện các phép biến đổi:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 6 & 3 & 238 \\ 2 & -1 & 6 & -3 & 70 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 21 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 21 \\ 2 & -1 & 6 & -3 & 70 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 238 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{h_3 \leftrightarrow h_3-2h_1 \\ h_4 \leftrightarrow h_4-2h_1}]{h_2 \leftrightarrow h_2-2h_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 21 \\ 0 & -3 & 8 & -1 & 28 \\ 0 & -1 & 8 & 5 & 196 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{h_4 \leftrightarrow h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 21 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & -1 & 8 & 5 & 196 \\ 0 & -3 & 8 & -1 & 28 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_4 \leftrightarrow h_4-3h_2]{h_3 \leftrightarrow h_3-h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 21 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 208 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 64 \end{array}\right) \xrightarrow{h_4 \leftrightarrow h_4-h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 21 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 208 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -144 \end{array}\right)$$

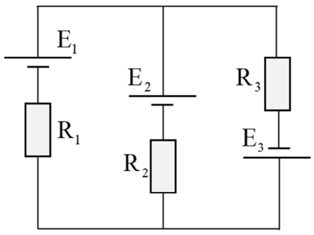
Như vậy, hệ phương trình ban đầu chuyển thành hệ tương đương thu gọn

$$\begin{cases} x+y-k-t=21 \\ -y+t=-12 \\ 8k+4t=208 \\ -8t=-144 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này từ dưới lên trên ta thu được nghiệm: t =18, k =17, y = 30, x = 26. Số Z của A là 26 tương đương A là Fe, số Z của B là 17 tương đương B là Cl. Vậy chất cần tìm là $FeCl_3$.

Quá trình phân tích và giải quyết các vấn đề liên quan đến mạch điện, đặc biệt là các mạch điện phức tạp rất cần sự hỗ trợ của phương trình tuyến tính. Trong quá trình nghiên cứu mạch, định luật Kirchhoff về dòng điện và điện áp thường được áp dụng để xác định mối quan hệ toán học giữa các đại lượng như dòng điện, điện áp và các thành phần cấu thành. Từ các mối quan hệ này, hệ phương trình tuyến tính được thiết lập để mô tả hoạt động của mạch điện một cách chi tiết và chính xác.

Bài toán 3: Cho mạch điện bên dưới:

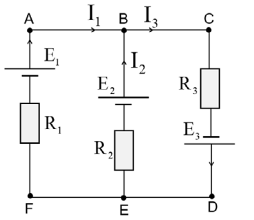


Biết: $R_1 = 5\Omega;\ R_2 = 15\Omega;\ R_3 = 10\Omega$;

$E_1 = 8V,\ E_2 = 6V, E_3 = 2V$. Xác định cường độ dòng điện chạy qua mỗi điện trở.

Giải:

Mạch điện trên phức tạp không thể tìm được dòng điện bằng định luật Ohm và các kỹ thuật ghép điện trở nối tiếp hoặc song song. Để giải mạch điện này cần phải sử dụng các quy tắc của định luật Kirchhoff. Giả sử dòng điện trên mỗi nhánh lần lượt là: I1, I2, I3 và hướng của chúng được giả định như trên hình vẽ. Các vị trí trên mạch điện được đánh dấu bằng các chữ cái từ A đến F.



Áp dụng định luật dòng điện của Kirchhoff ở nút B và định luật điện áp của Kirchhoff tại 2 vòng lặp ABEFA, BCDEB để thiết lập 3 phương trình độc lập để tìm ba dòng điện chưa biết.

Tại nút B, vì I_1, I_2 đi vào nút, trong khi I3 đi ra nên $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ (1)

Tại các vòng lặp, tổng đại số đại lượng điện áp bằng không với quy ước: Điện áp cùng chiều vòng lặp mang dấu (+), điện áp ngược chiều vòng lặp mang dấu (–).

Xét vòng lặp ABEFA, điện áp qua R1 và E2 cùng chiều vòng lặp nên dương, điện áp qua R2 và E1 ngược chiều vòng lặp nên âm:

$$E_2 - I_2R_2 + I_1R_1 - E_1 = 0 \quad (2)$$

Tương tự, với vòng lặp BCDEB:

$$I_3R_3 - E_3 + I_2R_2 - E_2 = 0 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ E_2 - I_2R_2 + I_1R_1 - E_1 = 0 \\ I_3R_3 - E_3 + I_2R_2 - E_2 = 0 \end{cases}$$

Với các số liệu đề cho, ta được:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 6 - 15I_2 + 5I_1 - 8 = 0 \\ 10I_3 - 2 + 15I_2 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 5I_1 - 15I_2 - 2 = 0 \\ 15I_2 + 10I_3 - 8 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên thu được:

$$I_1 = \frac{34}{55}; I_2 = \frac{4}{55}; I_3 = \frac{38}{55}$$

III. KẾT LUẬN

Qua quá trình nghiên cứu và áp dụng, việc sử dụng hệ phương trình tuyến tính đã cho thấy hiệu quả rõ rệt trong việc giải quyết các bài toán thuộc lĩnh vực Vật lý và Hóa học, giúp tiết kiệm thời gian tính toán, đảm bảo độ chính xác của kết quả thu được, đồng thời hỗ trợ người học trong việc xử lý các vấn đề khoa học phức tạp.

Các dạng bài tập như cân bằng phản ứng hóa học, bài toán về chuyển động, hoặc phân tích mạch điện phức tạp đều có thể được biểu diễn dưới dạng hệ phương trình tuyến tính. Điều này giúp người học không chỉ hiểu sâu hơn về lý thuyết mà còn phát triển khả năng tư duy toán học và vận dụng vào thực tiễn một cách linh hoạt.

Tuy nhiên, để phát huy tối đa khả năng của hệ phương trình tuyến tính, việc tận dụng hiệu quả các công cụ tính toán hỗ trợ là điều cần thiết. Bên cạnh đó, việc rèn luyện kỹ năng xây dựng hệ phương trình từ các bài toán thực tiễn cũng là yếu tố quan trọng giúp nâng cao hiệu quả nghiên cứu và học tập.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Cao Cự Giác (chủ biên) (2022). *Hóa học 11 - Chân trời sáng tạo.* NXB Giáo Dục.

Giác, C., Lien, N. T. P., & Tuan, P.-C. (2017). *Training Skills to Solve Some Inorganic Chemistry Exercises by Using the Graphic Method of Calculation for Teaching Chemistry in High School.* 5(1), 12–19. https://doi.org/10.12691/wjce-5-1-3

Nguyễn Bá Kim (2015). *Phương pháp dạy học môn Toán.* NXB Đại học Sư Phạm Hà Nội.

Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2017). *Toán học cao cấp tập 1,* Đại số và hình học giải tích. NXB Giáo dục.

Nguyễn Thành Vấn (2017). *Vật lý đại cương 2 Điện - Từ - Quang.* NXB Đại Học Quốc Gia TPHCM.