ĐẠO HÀM GIÚP PHÂN TÍCH SỰ THAY ĐỔI CỦA CÁC BIẾN SỐ KINH TẾ

Nguyễn Thị Thành
Giảng viên, Trường Đại học Công Nghệ Đồng Nai
Nguyễn Quốc Lâm
Sinh viên, Công nghệ thông tin, Trường Đại học Công Nghệ Đồng Nai

Tóm tắt: *Bài viết này tập trung vào việc khai thác ứng dụng của đạo hàm trong việc nghiên cứu các biến số kinh tế chính yếu như tốc độ tăng trưởng GDP và lạm phát. Đạo hàm, vốn là một công cụ hữu ích trong toán học, cho phép đánh giá mức độ thay đổi của các biến số này qua thời gian, nhờ đó cung cấp những nhận định quan trọng về xu hướng kinh tế. Bài viết minh họa đầy đủ cách tính toán tốc độ tăng trưởng GDP và lạm phát, kèm theo các ví dụ thực tế giúp làm rõ khái niệm. Ngoài ra, tác giả đã bàn luận về những ưu điểm và hạn chế khi áp dụng đạo hàm trong kinh tế học, nhằm hỗ trợ nhà kinh tế và nhà hoạch định chính sách đạt được những quyết định chính xác và hiệu quả. Bài viết cũng khẳng định rằng đạo hàm không chỉ giới hạn trong việc phân tích GDP và lạm phát, mà còn có thể ứng dụng ở nhiều lĩnh vực khác như phân tích chi phí, lợi nhuận và dự báo thị trường tài chính, góp phần quan trọng trong việc hỗ trợ ra quyết định kinh tế.*

Từ khóa: *Đạo hàm; ứng dụng; tăng trưởng; lạm phát; kinh tế.*

DERIVATIVES HELP ANALYZE CHANGES IN ECONOMIC VARIABLES

Nguyen Thi Thanh
Lecturer, Dong Nai Technology University
Nguyen Quoc Lam
Student, Information Technology, Dong Nai Technology University

Abbreviate: *This paper focuses on exploiting the application of derivatives in the study of key economic variables such as GDP growth rates and inflation. Derivatives, which are a useful tool in mathematics, allow to assess how much these variables change over time, thereby providing important observations about economic trends. The article fully illustrates how to calculate GDP growth and inflation, along with practical examples to help clarify the concept.*

In addition, the author discusses the advantages and limitations of applying ethics in economics, in order to support economists and policymakers to achieve accurate and effective decisions. The article also asserts that the derivative is not only limited to analyzing GDP and inflation, but can also be applied to many other fields such as analyzing costs, profits, and financial market forecasts, making an important contribution to supporting economic decision-making.

Keywords: *Derivatives; application; Growth; inflation; economic.*

Nhận bài: 12/12/2024 Phản biện: 03/01/2025 Duyệt đăng: 08/01/2025

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trước những thách thức và biến động phức tạp trong kinh tế toàn cầu, việc nghiên cứu và phân tích các biến số kinh tế trở thành nền tảng quản trọng đối với các nhà hoạch định chính sách. Để đạt được hiệu quả cao trong phân tích này, cần thiết sự hỗ trợ của các công cụ toán học mạnh mẽ, trong đó đạo hàm đóng vai trò là một công cụ trung tâm.

Đạo hàm, tuy là một khái niệm cơ bản trong toán học, nhưng đã trở thành công cụ phân tích đặc biệt hiệu quả trong kinh tế học. Thông qua đạo hàm, chúng ta có thể đo lường tốc độ thay đổi của các biến số kinh tế, từ đó nhận diện xu hướng và tình hình động lực của nền kinh tế.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Đạo hàm là một khái niệm trong toán học, dùng để biểu diễn mức độ thay đổi của một hàm số dựa vào sự thay đổi của một biến số liên quan. Trong kinh tế học, đạo hàm được sử dụng rộng rãi để xác định tốc độ thay đổi của các biến số như GDP, lạm phát, chi phí, v.v.

2.1. Ứng dụng của đạo hàm trong phân tích tốc độ tăng trưởng GDP

Khái niệm GDP: GDP (Gross Domestic Product) là tổng giá trị của tất cả hàng hóa và dịch vụ cuối cùng được sản xuất trong một quốc gia trong một khoảng thời gian nhất định.

Đạo hàm của GDP theo thời gian: Đạo hàm của GDP theo thời gian cho chúng ta biết tốc độ tăng trưởng GDP. Cụ thể, nếu (GDP(t)) là hàm số biểu thị GDP tại thời điểm (t), thì đạo hàm $\frac{d(GDP)}{dt}$ biểu thị tốc độ thay đổi của GDP theo thời gian.

Ví dụ thực tế:

Giả sử nền kinh tế một quốc gia được mô tả bằng hàm GDP có dạng: $G(t) = 500 \times (1 + 0.05)^t$

Trong đó:

G(t) là GDP vào năm t,

500 là GDP vào năm gốc (t = 0),

0.05 là tỷ lệ tăng trưởng hàng năm của GDP (5%).

Để tính tốc độ tăng trưởng GDP tại một thời điểm t, ta tính đạo hàm của hàm G(t):

$G'(t) = 500 \times (1.05)^t \times \ln(1.05)$

Giả sử chúng ta muốn biết tốc độ tăng trưởng GDP tại năm thứ 5 (t = 5), ta thay t = 5 vào biểu thức đạo hàm:

$G'(5) = 500 \times (1.05)^5 \times \ln(1.05) \approx 31.1$

Tính toán giá trị này sẽ cho ta tốc độ thay đổi GDP tại năm thứ 5, phản ánh mức độ tăng trưởng nền kinh tế tại thời điểm đó.

Ý nghĩa của đạo hàm trong phân tích:

Tốc độ tăng trưởng GDP: Đạo hàm G′(t) cho ta tốc độ tăng trưởng tức thời của nền kinh tế tại thời điểm t. Khi đạo hàm này dương, nền kinh tế đang tăng trưởng; khi âm, nền kinh tế đang suy giảm.

Dự báo tăng trưởng: Việc phân tích đạo hàm giúp dự báo tốc độ tăng trưởng trong tương lai và ra quyết định về các chính sách kinh tế.

Qua đó, đạo hàm không chỉ cung cấp thông tin về mức độ thay đổi GDP mà còn giúp hiểu rõ hơn về động lực và xu hướng phát triển của nền kinh tế trong các giai đoạn khác nhau.

2.2. Ứng dụng của đạo hàm trong phân tích lạm phát

Khái niệm lạm phát: Lạm phát là sự tăng giá chung của hàng hóa và dịch vụ theo thời gian, làm giảm giá trị thực của tiền tệ.

Ví dụ thực tế:

Giả sử chỉ số giá tiêu dùng (CPI) được mô tả bởi một hàm số theo thời gian:

$$CPI(t) = 100 + 5t + 0.2t^2$$

Trong đó, t là thời gian (ví dụ tính bằng tháng), và CPI(t) là chỉ số giá tiêu dùng tại thời điểm t.

Để phân tích tỷ lệ thay đổi của CPI theo thời gian, chúng ta sẽ tính đạo hàm của hàm số này:

$$CPI'(t) = 5 + 0.4t$$

Đạo hàm này cho chúng ta biết tốc độ thay đổi của chỉ số giá tiêu dùng tại mỗi thời điểm t. Ví dụ, tại t = 5 tháng, tốc độ thay đổi của CPI sẽ là:

Điều này có nghĩa là, tại tháng thứ 5, chỉ số giá tiêu dùng đang tăng với tốc độ 7 điểm mỗi tháng.

Thông qua việc áp dụng đạo hàm trong phân tích lạm phát, nhà phân tích có thể xác định được tốc độ thay đổi của lạm phát tại từng thời điểm, từ đó dự báo xu hướng của nền kinh tế và đề xuất các chính sách điều tiết phù hợp.

2.3. Ứng dụng đạo hàm trong phân tích chi phí và lợi nhuận

Khái niệm chi phí biên: Chi phí biên là chi phí phát sinh thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm. Đạo hàm của hàm chi phí tổng theo sản lượng giúp xác định chi phí biên.

Ví dụ thực tế:

Giả sử một công ty sản xuất một loại sản phẩm và có một hàm chi phí sản xuất C(x) và hàm doanh thu R(x) theo số lượng sản phẩm x sản xuất và bán ra. Ta muốn tìm mức sản lượng tối ưu sao cho công ty tối đa hóa lợi nhuận. Cụ thể

✓ Hàm chi phí C(x):

Công ty có một hàm chi phí sản xuất là:

$$C(x) = 1000 + 50x + 0.5x^2$$

Trong đó:

C(x) là chi phí tổng cho việc sản xuất xx sản phẩm.

1000 là chi phí cố định (không thay đổi theo sản lượng).

50x là chi phí biến đổi tuyến tính (chi phí trực tiếp với mỗi sản phẩm).

0.5x2 là chi phí thay đổi không tuyến tính (tăng dần khi sản lượng tăng lên).

✓ Hàm doanh thu R(x):

Giả sử công ty bán sản phẩm với giá 100 đồng mỗi sản phẩm. Hàm doanh thu sẽ là:

R(x) = 100x

Trong đó:

R(x) là doanh thu thu được từ việc bán x sản phẩm, với giá bán là 100 đồng mỗi sản phẩm.

✓ Hàm lợi nhuận P(x):

Lợi nhuận là sự chênh lệch giữa doanh thu và chi phí, do đó hàm lợi nhuận sẽ là:

$$P(x) = R(x) - C(x) = -1000 + 50x - 0.5x^2$$

✓ Tìm mức sản lượng tối ưu:

Để tìm mức sản lượng x tối ưu (tức là sản lượng mà tại đó lợi nhuận đạt cực đại), ta cần tính đạo hàm của hàm lợi nhuận P(x) và tìm điểm cực trị.

Đạo hàm của hàm lợi nhuận:

$P'(x) = 50 - x$

Để tìm điểm cực đại, ta đặt đạo hàm bằng 0:

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 50 - x = 0 \Rightarrow x = 50$$

Vậy mức sản lượng tối ưu là x = 50 sản phẩm.

✓ Kiểm tra cực trị:

Để xác định đây là cực đại hay cực tiểu, ta tính đạo hàm bậc hai của hàm lợi nhuận:

$$P''(x) = -1$$

Vì đạo hàm bậc hai là âm, nên điểm x = 50 là điểm cực đại, tức là sản lượng tối ưu để công ty tối đa hóa lợi nhuận.

✓ Lợi nhuận tại mức sản lượng tối ưu:

Cuối cùng, ta tính lợi nhuận tại x = 50:

$$P(50) = -1000 + 50 \cdot 50 - 0.5 \cdot (50)^2 = 250$$

Vậy lợi nhuận tối đa mà công ty có thể đạt được khi sản xuất và bán 50 sản phẩm là 250 đồng.

✓ Kết luận:

Công ty tối ưu hóa lợi nhuận bằng cách sản xuất và bán 50 sản phẩm.

Lợi nhuận tối đa là 250 đồng.

Đạo hàm đã giúp xác định mức sản lượng tối ưu và phân tích lợi nhuận dựa trên chi phí và doanh thu.

2.4. Ứng dụng đạo hàm trong tối ưu hóa sản xuất và tiêu dùng

Khái niệm lợi ích biên: Lợi ích biên là lợi ích tăng thêm khi tiêu dùng thêm một đơn vị sản phẩm. Đạo hàm của hàm lợi ích tổng theo số lượng sản phẩm tiêu dùng giúp xác định lợi ích biên.

Ví dụ thực tế:

Đạo hàm là công cụ mạnh mẽ trong tối ưu hóa, giúp phân tích và ra quyết định về việc sản xuất và tiêu dùng sao cho đạt được kết quả tối ưu.

Giả sử một hộ gia đình muốn tối ưu hóa việc phân bổ ngân sách giữa sản xuất và tiêu dùng. Họ có thể sản xuất một loại sản phẩm và tiêu dùng một phần sản phẩm đó, phần còn lại bán ra thị trường. Mục tiêu của hộ gia đình là tối đa hóa tiện ích (sự thỏa mãn) từ tiêu dùng sản phẩm và lợi nhuận từ việc bán sản phẩm, trong khi vẫn phải chịu chi phí sản xuất.

✓ Hàm sản xuất:

Giả sử sản lượng sản phẩm y của hộ gia đình phụ thuộc vào số giờ lao động L mà họ dành cho việc sản xuất. Hàm sản xuất có thể được mô tả như sau: $y = 10L - 0.5L^2$

Trong đó:

y là số lượng sản phẩm được sản xuất.

L là số giờ lao động mà hộ gia đình dành cho sản xuất.

Hàm sản xuất có dạng bậc 2, với điểm cực trị tại một giá trị L nhất định.

✓ Hàm lợi nhuận:

Hộ gia đình bán sản phẩm với giá p mỗi đơn vị và chi phí sản xuất là C(L) = 2L (mỗi giờ lao động tốn chi phí 2 đồng). Lợi nhuận sẽ được tính như sau:

Lợi nhuận (L) = p.y − C(L)

Với $y = 10L - 0.5L^2$ và C(L) = 2L,

Ta có hàm lợi nhuận:

$(L) = p(10L - 0.5L^2) - 2L = (10p - 2)L - 0.5pL^2$

✓ Hàm tiện ích:

Hộ gia đình cũng có một hàm tiện ích U(x) từ việc tiêu dùng sản phẩm, trong đó x là số sản phẩm mà họ tiêu dùng. Giả sử hàm tiện ích có dạng:

$$U(x) = 20\ln(x)$$

Trong đó:

x là số sản phẩm tiêu dùng.

Hàm tiện ích thể hiện sự thỏa mãn của hộ gia đình từ việc tiêu dùng sản phẩm.

✓ Tối ưu hóa tổng tiện ích và lợi nhuận:

Hộ gia đình cần tối ưu hóa tổng tiện ích từ tiêu dùng và lợi nhuận từ sản xuất. Tuy nhiên, số sản phẩm tiêu dùng sẽ là phần sản phẩm không bán, tức là x = y − Số sản phẩm bán ra.

Giả sử hộ gia đình bán một phần b của sản phẩm y, và tiêu dùng phần còn lại, ta có: x = y - b

Tổng tiện ích của hộ gia đình là tổng của tiện ích từ tiêu dùng và lợi nhuận từ sản xuất, tức là:

Tổng tiện ích = U(x) + Lợi nhuận

Thay các biểu thức vào, ta có hàm mục tiêu:

Tổng tiện ích

$= 20\ln(y - b) + (10p - 2)L - 0.5pL^2$

✓ Tối ưu hóa hàm mục tiêu:

Để tối ưu hóa hàm mục tiêu, ta tính đạo hàm theo L và b, sau đó giải hệ phương trình để tìm giá trị tối ưu của L và b.

Đạo hàm của tổng tiện ích theo L và b sẽ cho chúng ta tốc độ thay đổi của tiện ích và lợi nhuận đối với các biến số này.

Tìm các giá trị L và b sao cho hàm mục tiêu đạt giá trị cực đại.

✓ Kết quả:

Kết quả tối ưu có thể cho biết rằng, ví dụ, hộ gia đình nên dành 50 giờ lao động cho sản xuất (giá trị L=50) và bán một số lượng sản phẩm nhất định để tối đa hóa tổng tiện ích từ tiêu dùng và lợi nhuận từ sản xuất.

2.5. Ứng dụng đạo hàm trong dự báo thị trường tài chính

Khái niệm tốc độ thay đổi giá cổ phiếu: Đạo hàm của hàm giá cổ phiếu theo thời gian cho biết tốc độ thay đổi giá cổ phiếu, giúp các nhà đầu tư dự báo xu hướng giá cổ phiếu.

Ví dụ thực tế:

Giả sử giá cổ phiếu P(t) của một công ty là: P(t) = 100 + 2t - 0.1t2.

Trong đó (t) là thời gian (ngày).

Đạo hàm của hàm giá cổ phiếu là P'(t) = 2 - 0.2t.

Nếu (t = 5) ngày, tốc độ thay đổi giá cổ phiếu là: P'(5) = 2 - 0.2 * 5 = 1 (đơn vị tiền tệ/ngày).

2.6. Ứng dụng đạo hàm trong phân tích lợi nhuận biên

Khái niệm lợi nhuận biên: Lợi nhuận biên là lợi nhuận tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm. Đạo hàm của hàm lợi nhuận tổng theo sản lượng giúp xác định lợi nhuận biên.

Ví dụ thực tế:

Giả sử hàm lợi nhuận tổng $\pi(x)$ của một công ty là:

$$\pi(x) = 200x - 0,5x^2$$

Trong đó (x) là số lượng sản phẩm.

Đạo hàm của hàm lợi nhuận tổng là:

$$\pi'(x) = 200 - x$$

Nếu công ty sản xuất 50 đơn vị sản phẩm, lợi nhuận biên là: $\pi'(50) = 200 - 50 = 150$ (đơn vị tiền tệ).

2.7. Ứng dụng đạo hàm trong phân tích tốc độ tăng trưởng dân số

Khái niệm tốc độ tăng trưởng dân số: Đạo hàm của hàm dân số theo thời gian cho biết tốc độ tăng trưởng dân số.

Ví dụ thực tế:

Giả sử hàm dân số P(t) của một quốc gia là:

$P(t) = 1.000.000 * e^{0.02t}$

Trong đó t là thời gian tính theo năm.

Nếu t = 10 năm, tốc độ tăng trưởng dân số là bao nhiêu?

Phân tích ví dụ:

Ta có hàm dân số: $P(t) = 1.000.000 * e^{0.02t}$,với t là thời gian tính theo năm.

Đạo hàm của hàm dân số là:

$P'(t) = 1.000.000 * 0.02 * e^{0.02t} = 20.000 * e^{0.02t}$

Ý nghĩa:

P(t): Dân số tại thời điểm t (số người).

P′(t): Tốc độ tăng trưởng dân số tại thời điểm t (người/năm).

Tính tốc độ tăng trưởng tại t = 10:

Tính $e^{0.02*10} = e^{0.2}$. Ta biết: $e^{0.2} \approx 1.221$

Thay vào biểu thức P′(10):

$P'(10) = 20.000 * e^{0.02*10} = 20.000 * e^{0.2} = 20.000 * 1.221 \approx 24,428$

Kết quả:

Tốc độ tăng trưởng dân số tại t =10 là khoảng: P′(10) ≈ 24,428 người/năm.

Điều này có nghĩa là sau 10 năm, dân số của quốc gia đang tăng thêm khoảng 24,428 người mỗi năm.

2.8. Ứng dụng đạo hàm trong phân tích tốc độ thay đổi nhiệt độ

Khái niệm tốc độ thay đổi nhiệt độ: Đạo hàm của hàm nhiệt độ theo thời gian cho biết tốc độ thay đổi nhiệt độ.

Ví dụ thực tế:

Giả sử hàm nhiệt độ T(t) của một ngày là:

$$T(t) = 20 + 5\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

Trong đó t là thời gian (giờ). Nếu t = 6 giờ, thì tốc độ thay đổi nhiệt độ bao nhiêu?

Phân tích ví dụ:

$$T(t) = 20 + 5\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

Theo đề ta có:

Đạo hàm của hàm nhiệt độ:

Đạo hàm của T(t) theo t: $T'(t) = 5 \cdot \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$

Tính tốc độ thay đổi nhiệt độ tại t = 6:

Xác định giá trị của :

$$\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi \cdot 6}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ta có:

Kết quả:

Tại t = 6 giờ, tốc độ thay đổi nhiệt độ là: T′(6) = 0 (độ C/giờ).

Ý nghĩa:

Nhiệt độ không thay đổi tại thời điểm t = 6 giờ. Đây thường là điểm cực đại hoặc cực tiểu của hàm nhiệt độ trong ngày. Trong trường hợp này, tại t = 6, nhiệt độ đạt đỉnh hoặc đáy.

2.9. Ứng dụng của đạo hàm để dự báo năng lượng:

Bối cảnh: Hàm tiêu thụ năng lượng

$E(t) = 500 + 20t - 0.5t^2$

Đạo hàm: $E'(t) = 20 - t$

Tính toán: Giả sử tại t = 10 năm, tốc độ thay đổi là $E'(10) = 20 - 10 = 10$ đơn vị năng lượng/năm. Điều này cho thấy mức tiêu thụ năng lượng tăng chậm dần và đạt đỉnh khi t = 20.

2.10. Ứng dụng của đạo hàm để dự báo tác động môi trường:

Bối cảnh: Mức phát thải CO2

$$C(t) = 1000 - 30t + t^2$$

Đạo hàm: $C'(t) = -30 + 2t$

Tính toán: Khi t = 15 năm, tốc độ thay đổi phát thải là $C'(15) = -30 + 2 * 15 = 0$, cho thấy trạng thái ổn định của phát thải.

III. KẾT LUẬN

Đạo hàm là công cụ toán học thiết yếu trong kinh tế học, hỗ trợ phân tích và dự báo các biến số như tăng trưởng GDP và lạm phát. Nó giúp đo lường tốc độ thay đổi, từ đó nhận diện xu hướng kinh tế và đánh giá hiệu quả chính sách. Trong nghiên cứu GDP, đạo hàm xác định tốc độ tăng trưởng tại từng thời điểm, hỗ trợ dự báo và phát hiện các dấu hiệu suy thoái hoặc phát triển quá nóng. Với lạm phát, đạo hàm chỉ số giá tiêu dùng (CPI) cung cấp thông tin quan trọng để kiểm soát và duy trì sự ổn định. Ngoài ra, đạo hàm còn ứng dụng trong tối ưu hóa chi phí, lợi nhuận và dự báo tài chính. Tóm lại, đạo hàm mang lại giá trị thực tiễn cao, góp phần vào các quyết định chính sách hiệu quả và thúc đẩy phát triển kinh tế bền vững.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Samuelson, P. A., & Nordhaus, W. D. (2010). Economics. McGraw-Hill Education.

Mankiw, N. G. (2014). *Principles of Economics*. Cengage Learning.

Blanchard, O. (2017). *Macroeconomics.* Pearson Education.

Nguyễn Quốc Hưng, *Toán Cao Cấp C1 Và Một Số Ứng Dụng Trong Kinh Doanh* - NXB Đại học Quốc gia TPHCM

Lê Đình Thúy, *Giáo trình Toán cáo cấp cho các nhà kinh tế - Phần II: Giải tích toán học* - NXB Đại học kinh tế Quốc Dân

Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp, tập 2, Phép tính giải tích một biến số* - NXB Giáo dục Việt Nam