ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM, TÍCH PHÂN GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP VẬT LÝ CƠ HỌC

Đỗ Thị Ngọc Dương
Giảng viên, Trường Đại học Công nghệ Đồng Nai
Lại Tiến Phước
Sinh viên, Ngành Công nghệ kỹ thuật ô tô, Trường Đại học Công nghệ Đồng Nai

Tóm tắt: *Để đạt được các tiêu chuẩn đầu ra của các khóa học Toán, sinh viên cần có khả năng áp dụng kiến thức toán học để giải quyết các vấn đề chuyên môn và thực tiễn. Bài viết đề cập đến việc ứng dụng đạo hàm và tích phân trong toán học để giải quyết các bài tập vật lý cơ học. Thông qua các bài tập cụ thể, sinh viên sẽ có được sự hiểu biết sâu sắc hơn về mối quan hệ giữa toán học và vật lý. Vật lý sử dụng toán học để mô tả, phân tích và dự đoán các hiện tượng tự nhiên, trong khi đó toán học mô hình hóa các khái niệm và định luật vật lý dưới dạng công thức, phương trình.*

Từ khóa: *Gia tốc, đạo hàm, khoảng cách, tích phân, công cơ học, vận tốc*

APPLICATION OF DERIVATIVES AND INTEGRALS TO SOLVE SOME MECHANICS PHYSICS PROBLEMS

Do Thi Ngoc Duong
Lecturer, Dong Nai Technology University
Lai Tien Phuoc
Student, Automotive Engineering Technology, Dong Nai Technology University

Abstract: *To achieve the output standards of Mathematics courses, students need to be able to apply mathematical knowledge to solve specialized and practical problems. The paper deals with the application of derivatives and integrals in mathematics to solve mechanical physics exercises. Through specific exercises, students gain a deeper understanding of the relationship between mathematics and physics. Physics uses mathematics for describing, analyzing, and predicting natural phenomena, whereas mathematics models physical concepts and laws in the form of formulas, equations.*

Keywords: *Acceleration, derivative, distance, integral, mechanical work, velocity*

Nhận bài: 21/10/2024 *Phản biện: 11/11/2024* *Duyệt đăng: 16/11/2024*

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Toán học giữ vai trò nền tảng trong vật lý, là công cụ giúp mô tả, phân tích và dự đoán các hiện tượng tự nhiên. Ứng dụng của toán học nói chung, đạo hàm và tích phân nói riêng rất rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học, công nghệ trong đó có vật lý. Ý nghĩa của phép đạo hàm, tích phân trong vật lý cho thấy những ứng dụng của toán học trong thực tiễn.

Phương pháp đánh giá kết quả học tập dựa trên chuẩn đầu ra tập trung vào việc đánh giá năng lực của người học trên cả ba mặt kiến thức, kỹ năng và thái độ nghĩa là chuyển trọng tâm từ việc đánh giá sinh viên (SV) học được cái gì sang đánh giá SV vận dụng được gì qua việc học. Do đó, việc vận dụng đạo hàm, tích phân để giải các bài tập vật lý giúp SV nâng cao khả năng vận dụng kiến thức toán học vào thực tiễn.

Cách thức và lý do tại sao các vật thể chuyển động là các vấn đề nghiên cứu của vật lý cơ học. Đạo hàm và tích phân là hai công cụ chính được sử dụng trong cơ học để mô tả và phân tích chuyển động, lực, và năng lượng. Trong bài báo, chúng tôi sử dụng các phép toán đạo hàm và tích phân để giải các bài tập vật lý cơ học. Thực hành với nhiều bài toán khác nhau để cải thiện kỹ năng áp dụng các công cụ toán học này vào các tình huống vật lý cơ học. Việc hiểu và áp dụng thành thạo đạo hàm, tích phân cho việc nghiên cứu và giải quyết các vấn đề vật lý cơ học giúp làm sáng tỏ giá trị của toán học nói chung và của đạo hàm, tích phân nói riêng trong thực tiễn.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Ứng dụng của đạo hàm trong cơ học

Đạo hàm là một công cụ toán học dùng để đo tốc độ biến đổi của hàm số theo biến số. Tốc độ thay đổi được biểu diễn dưới dạng:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = f'(x) = y'$$

Như vậy, để biểu diễn lượng thay đổi của hàm số $y = f(x)$ khi biến x tăng hoặc giảm đi một đơn vị ta dùng đạo hàm $f'(x)$. Trong vật lý, điều này thường liên quan đến tốc độ thay đổi theo thời gian hoặc không gian của các đại lượng vật lý.

Đạo hàm theo thời gian biểu thị tốc độ thay đổi của một đại lượng nào đó theo thời gian. Trong cơ học, quãng đường đi của vật, vận tốc tức thời (gọi tắt là vận tốc) và gia tốc được biểu thị dưới dạng hàm số của thời gian, giữa chúng có mối liên hệ thông qua đạo hàm.

Phương, chiều và sự chuyển động nhanh hay chậm của vật được đặc trưng bởi vector vận tốc. Độ lớn của vận tốc hay tốc độ tại thời điểm t được định nghĩa là đạo hàm của quãng đường đối với thời gian: $\mathrm{v}(t) = \dfrac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{s}'$. Trong hệ tọa độ Descartes, độ lớn của vector vận tốc có dạng:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}$$

Với $\mathrm{v}_x = \dfrac{dx}{dt} = x';\ \mathrm{v}_y = \dfrac{dy}{dt} = y';\ \mathrm{v}_z = \dfrac{dz}{dt} = z'$

là các thành phần của vector vận tốc trên các trục Ox, Oy, Oz.

Vector vận tốc của chuyển động luôn biến đổi theo thời gian. Để đo sự biến đổi này ở một thời điểm t xác định, cơ học sử dụng đại lượng gia tốc $\vec{\mathrm{a}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} = \vec{\mathrm{v}}'$. Trong các chuyển động cong, vận tốc không chỉ biến đổi về độ lớn mà còn thay đổi về cả phương, chiều. Khi đó, vector gia tốc được phân tích làm hai thành phần vuông góc nhau, gọi là gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến. Gia tốc tiếp tuyến $\mathrm{a}_t = \mathrm{v}'$ biểu thị tốc độ biến đổi theo thời gian về độ lớn của vận tốc. Gia tốc pháp tuyến $\mathrm{a}_n = \dfrac{\mathrm{v}^2}{R}$ cho biết phương của chuyển động thay đổi như thế nào theo thời gian.

Bài tập 1: Cho vật chuyển động trên quỹ đạo thẳng với phương trình:

$$\mathrm{x} = -10 - 6t^2 + 4t^3 (\mathrm{m,\ s}).$$

a) Xác định độ lớn của vận tốc và gia tốc lúc t = 3s

b) Nêu tính chất của chuyển động trong 2 giây đầu tiên, kể từ lúc .

Giải

a) Chất điểm chuyển động trên trục Ox, do đó các vector $\vec{\mathrm{v}}, \vec{\mathrm{a}}$ luôn cùng phương với trục Ox. Giá trị của các vector này được tính như sau:

$$v = v_{x_t} = x'\ ;\ a = a_x = v_x'$$

Cụ thể, từ phương trình x trên, suy ra:

$$\mathrm{v} = x' = -12t + 12t^2 = -12.3 + 12.3^2 = 72\mathrm{m/s}$$

Gia tốc: $a = v' = -12 + 24t$, với t = 3s, suy ra $\mathrm{a} = 60\mathrm{m/s}^2$

b) Tính chất của chuyển động liên quan đến dấu của hai đại lượng vận tốc và gia tốc. Nếu a và v cùng dấu ta có chuyển động nhanh dần, trái dấu là chậm dần. Vì vector vận tốc đặc trưng cho sự nhanh chậm và phương chiều của chuyển động nên v > 0 ta có vật chuyển động theo chiều dương, v < 0 vật chuyển động theo chiều âm. Như vậy, để xác định tính chất của chuyển động, ta phải xét dấu của vận tốc và gia tốc.

Xét phương trình

$$\mathrm{v} = 0 \Leftrightarrow -12t + 12t^2 = 0 \Rightarrow t = 0;\ t = 1$$

và phương trình

$$a = 0 \Leftrightarrow -12 + 24t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Lập bảng xét dấu:

Bảng 2.1: Bảng xét dấu vận tốc và gia tốc

t		0		$\frac{1}{2}$		1		2
v	+	0	−		−	0	+	
a	−		−	0	+		+	
v.a			+		−		+	

Kết luận: Trong khoảng thời gian từ 0 đến 2 giây, tính chất của chuyển động như sau:

Từ 0 đến $\frac{1}{2}$ s vật đi theo chiều âm với vận tốc nhanh dần.

Từ $\frac{1}{2}$ đến 1s vật giữ nguyên chiều chuyển động tức vẫn đi theo chiều âm nhưng vận tốc giảm dần.

Từ 1 đến 2s vật tăng tốc và đổi chiều đi theo chiều dương.

Bài tập 2: Trong hệ tọa độ Descartes, Vector bán kính của một chất điểm biến thiên theo quy luật: $\vec{r} = 2t.\vec{i} - 2t^2.\vec{j}$, với $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vector đơn vị.

a) Xác định quỹ đạo của chất điểm.

b) Tính độ lớn của vận tốc và gia tốc theo thời gian.

c) Tính độ lớn của gia tốc tiếp tuyến lúc t = 2s.

Giải

a) Từ vector bán kính ta suy ra:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2t^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Quỹ đạo là tập hợp tất cả các vị trí của chất điểm. Để biểu diễn quỹ đạo, ta cần xác định đồ thị của hàm số y theo biến x. Từ phương trình (1), suy ra $t = \frac{x}{2}$, thế t vào phương trình y ta được $y = -\frac{x^2}{2}$. Hàm số $y = -\frac{x^2}{2}$ mô tả dạng quỹ đạo của của chuyển động, đó là một đường parabol.

b) Ta có $\begin{cases} v_x = x' = 2 \\ v_y = y' = -4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = v'_x = 0 \\ a_y = v'_y = -4 \end{cases}$

Biểu thức độ lớn của vận tốc và gia tốc theo thời gian trong hệ tọa độ Descartes là:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 16t^2}, \; a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4\text{m/s}^2$$

c) Gia tốc tiếp tuyến $a_t = v' = \left(\sqrt{4+16t^2}\right)' = \frac{16t}{\sqrt{4+16t^2}}$

Lúc t = 2s, suy ra $a_t = \frac{16\sqrt{17}}{17} \approx 3{,}88\text{m/s}^2$.

Gia tốc tiếp tuyến $a_t > 0$ chứng tỏ lúc t = 2s chất điểm đang chuyển động nhanh dần.

Như vậy, chuyển động của các vật thể có thể được mô tả thông qua phép đạo hàm. Đạo hàm cung cấp thông tin về vận tốc và gia tốc. Việc yêu cầu SV thực hành nhiều lần các bài toán tính gia tốc, vận tốc giúp SV hình thành kiến thức về đạo hàm một cách vững chắc đồng thời biết vận dụng lý thuyết vào giải quyết các vấn đề thực tiễn.

Theo định luật thứ hai của Newton, lực bằng khối lượng nhân với gia tốc, trong đó gia tốc là đạo hàm bậc hai của vị trí theo thời gian. Điều này cho thấy mối quan hệ chặt chẽ giữa đạo hàm và lực trong việc mô tả chuyển động của vật thể trong không gian và thời gian.

Mối quan hệ giữa lực, khối lượng và gia tốc được thể hiện qua định luật II Newton. Lực bằng khối lượng nhân với gia tốc $\vec{F} = m.\vec{a}$, trong đó gia tốc là đạo hàm bậc hai của vị trí hay đạo hàm bậc nhất của vận tốc theo thời gian. Như vậy, $\vec{F} = m.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ hay $\vec{F} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}$. Nếu biết phương trình vị trí của vật bằng cách sử dụng đạo hàm, chúng ta suy ra gia tốc, từ đó tính được lực tác dụng lên vật. Điều này cho thấy lực là nguyên nhân gây ra sự biến thiên vận tốc của vật và đạo hàm giúp chúng ta xác định được giá trị của lực một cách dễ dàng.

Bài tập 3: Vật chuyển động trên trục Ox với vận tốc $v(t) = 5t^2 - 3t + 2(\text{m/s})$. Biết rằng khối lượng của vật là m = 2kg. Thời điểm t = 3 giây, lực F tác dụng lên vật có độ lớn bằng bao nhiêu?

Giải

Tính gia tốc: $a = v' = 10t - 3\left(m/s^2\right)$

Thay t = 3 giây vào phương trình gia tốc a = 10t - 3 suy ra $a = 27m/s^2$

Lực: $F = m.a = 2.27 = 54N$

2.2. Ứng dụng của tích phân

Tích phân là phép toán ngược lại với phép tính vi phân: $\int \frac{df}{dx}dx = f(x) + C$

Trong vật lý luôn tồn tại các hàm biến thiên liên tục. Việc suy ra các đại lượng vật lý từ các hàm này đòi hỏi phải có công cụ toán học trợ giúp đó là tích phân. Như vậy, tích phân cho phép chúng ta tính toán và mô tả nhiều hiện tượng vật lý phức tạp. Trong cơ học, tích phân được sử dụng để phân tích chuyển động, ta dễ dàng tính được vận tốc và gia tốc từ hàm vị trí, xác định quãng đường di chuyển từ hàm vận tốc.

Bài toán tính quãng đường từ vận tốc xuất phát từ mối quan hệ giữa vận tốc, thời gian và quãng đường di chuyển: $s = \int_{t_1}^{t_2} |v| dt$. Thực tế cho thấy vận tốc di chuyển của một vật luôn biến đổi theo thời gian do giao thông, điều kiện đường sá, hoặc do môi trường thay đổi. Bằng cách sử dụng tích phân chúng ta có thể xác định chính xác quãng đường vật di chuyển trong các trường hợp phức tạp.

Bài tập 4: Một xe đang chạy với vận tốc v_0. Khi gặp chướng ngại vật, tài xế hãm phanh. Kể từ đó vận tốc xe thay đổi theo quy luật $v = v_0 - kt^2$, trong đó k là hằng số, t là thời gian. Xác định quãng đường đi của xe từ lúc hãm phanh đến lúc dừng hẳn.

Giải

Gọi thời điểm xe bắt đầu hãm phanh là $t = 0$. Khi xe dừng, vận tốc bằng không

$$v_0 - kt^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{v_0}{k}}$$

Quãng đường xe di chuyển tính từ lúc $t = 0$ đến lúc $t = \sqrt{\frac{v_0}{k}}$ được tính bằng tích phân:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |v| dt = \int_0^{\sqrt{\frac{v_0}{k}}} \left|v_0 - kt^2\right| dt = v_0.t - \frac{1}{3}kt^3 \Big|_0^{\sqrt{\frac{v_0}{k}}} = v_0.\sqrt{\frac{v_0}{k}} - \frac{1}{3}.v_0\sqrt{\frac{v_0}{k}} = \frac{2}{3}.v_0\sqrt{\frac{v_0}{k}}$$

Trong cơ học vị trí và tính chất chuyển động của một vật được được trưng bởi các đại lượng: Vector bán kính $\vec{r}$, vector vận tốc $\vec{v}$ và gia tốc $\vec{a}$. Nếu biết quy luật biến đổi theo thời gian của một trong ba vector trên, ta sẽ tìm được các vector còn lại thông qua các phép đạo hàm và tích phân. Cụ thể, khảo sát một chuyển động thẳng trên trục Ox, khi đó vận tốc $v(t) = x'(t)$ và gia tốc $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Ngược lại: $v(t) = \int a dt$ và $x(t) = \int v dt$.

Bài tập 5: Một vật được thả rơi tự do trong không khí với gia tốc biến đổi theo quy luật

a = g - kv. Trong đó, g là gia tốc trọng trường của Trái Đất, k là hằng số. Xác định hàm vận tốc và hàm vị trí của vật theo biến thời gian t.

Giải

Vật chuyển động theo quỹ đạo thẳng đứng, hình chiếu của vector vận tốc và gia tốc trên quỹ đạo này có các giá trị đại số là v, a.

Ta có: $a = g - kv \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv \Rightarrow \frac{dv}{g - kv} = dt$

Phương trình vận tốc được xác định thông qua tích phân: $\int \frac{dv}{g - kv} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{k}\ln(g - kv) = t + C$

Suy ra $v = \frac{g}{k} - \frac{e^{-kt}.e^{kC}}{k}$

Giả sử ban đầu vật đang đứng yên $v = 0$, khi đó $0 = \frac{g}{k} - \frac{e^{kC}}{k} \Rightarrow \frac{e^{kC}}{k} = \frac{g}{k}$. Vậy hàm vận tốc thu được là: $v = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$.

Từ hàm vận tốc, ta xác định hàm vị trí thông qua tích phân:

$$x(t) = \int v dt = \int \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) dt = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C$$

Coi lúc t = 0, vật đang ở gốc tọa độ, suy ra:

$$0 = \frac{g}{k^2} + C \Rightarrow C = -\frac{g}{k^2}$$

Vậy vị trí của vật theo thời gian được xác định bởi phương trình:

$$x(t) = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} - \frac{g}{k^2} = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right)$$

Vật có thể truyền năng lượng khi bị tác dụng lực. Đại lượng dùng để đo mức năng lượng trao đổi này gọi là công. Trong nhiều bài toán phức tạp, khi lực $\vec{F}$ là một đại lượng biến đổi theo thời gian hoặc theo vị trí thì tích phân được sử dụng để tính công trong các trường hợp này. $A_{12} = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{s}$. Nhờ tích phân, chúng ta dễ dàng tính được công của lực $\vec{F}$ tức là xác định được phần năng lượng trao đổi giữa các vật.

Bài toán 6: Tính công thực hiện bởi lực $\vec{F} = (2x;\ 3y;\ 0)$ tác dụng vào một chất điểm làm nó di chuyển từ điểm M (0; 3; 0) đến N (3; 0; 0).

Giải

Công của lực $\vec{F}$ từ M đến N là:

$$A_{MN} = \int_{M}^{N} \vec{F} d\vec{s} = \int_{x_M}^{x_N} F_x dx + \int_{y_M}^{y_N} F_y dy + \int_{z_M}^{z_N} F_z dz$$

$$= \int_{0}^{3} 2x dx + \int_{3}^{0} 3y dy = -4,5J$$

III. KẾT LUẬN

Các tri thức về cơ học là những tri thức có liên hệ trực tiếp với thực tiễn. Sử dụng các bài tập vật lý cơ học để củng cố kiến thức về đạo hàm, tích phân giúp SV hình thành kiến thức một cách vững chắc đồng thời biết vận dụng kiến thức để giải quyết các bài toán liên quan đến chuyên ngành và thực tế nghề nghiệp. Toán học cung cấp các công cụ và phương pháp để giải quyết các bài toán vật lý, từ đơn giản đến phức tạp. Khi SV thấy sự ứng dụng của toán trong vật lý, họ sẽ hiểu rõ hơn về tầm quan trọng của toán học trong cuộc sống thực tế.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Nguyễn Bá Kim (2015). *Phương pháp dạy học môn toán*. NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.

Lê Thị Hoài Châu (2014). *Mô hình hóa trong dạy học khái niệm đạo hàm.* Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, 5 – 18.

Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2017). *Toán học cao cấp tập 2, Phép tính giải tích một biến số.* NXB Giáo dục.

Lương Duyên Bình (2017). *Vật lý đại – tập 1 Cơ Nhiệt.* NXB Giáo dục.

Trần Thanh Nhạc, Nguyễn Thành Vấn (2012). *Cơ nhiệt - Vật lý đại cương.* NXB Đại học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh.

Nguyễn Hữu Thọ (2009). 1*500 Câu hỏi trắc nghiệm Cơ – Nhiệt.* NXB Đại học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh.