ỔN ĐỊNH VÀ TIỀM NĂNG: GIAO ĐIỂM GIỮA LÝ THUYẾT BẤT BIẾN HÌNH HỌC VÀ TRIẾT HỌC

Võ Duy Hoàng
Trường Đại học Công nghệ Đông Á
Email: hoangvd@eaut.edu.vn

Tóm tắt: *Bài viết này khảo sát điểm giao thoa giữa Lý thuyết bất biến hình học (Geometric Invariant Theory – GIT) và triết học cổ điển, dựa trên các khái niệm do Bate–Herpel–Martin–Röhrle (2017) phát triển về bao đóng đối đặc trưng và Định lý Hilbert–Mumford hữu tỉ. Tác giả tập trung vào bốn phạm trù toán học – tính ổn định và quỹ đạo đóng, bao đóng đối đặc trưng, tính n-accessible, và nhóm reductive – và đặt chúng trong đối thoại với những phạm trù triết học từ Aristote đến Kant và Hegel. Ổn định phản ánh cân bằng biện chứng, bao đóng đối đặc trưng tương ứng với phân biệt tiềm năng – hiện thực, tính n-accessible soi chiếu giới hạn của nhận thức, còn nhóm reductive tượng trưng cho mối quan hệ bản chất – hiện tượng. Qua đó, bài viết đề xuất rằng GIT không chỉ cung cấp công cụ hình thức cho hình học đại số mà còn có thể trở thành mô hình cho cấu trúc triết học của biến đổi, trật tự và tri thức.*

Từ khóa: *Lý thuyết bất biến hình học; Bao đóng đối đặc trưng; Định lý Hilbert–Mumford hữu tỉ; Ổn định; n-accessible; Nhóm reductive; Triết học của toán học.*

STABILITY AND POTENTIAL: THE INTERSECTION OF GEOMETRIC INVARIANCE THEORY AND PHILOSOPHY

Vo Duy Hoang
East Asia University of Technology
Email: hoangvd@eaut.edu.vn

Abstract:*This article examines the intersection between Geometric Invariant Theory (GIT) and classical philosophy, focusing on concepts developed by Bate–Herpel–Martin–Röhrle (2017) regarding cocharacter closure and the rational Hilbert–Mumford Theorem. We concentrate on four mathematical notions—stability and closed orbits, cocharacter closure, n-accessibility, and reductive groups and place them in dialogue with philosophical categories ranging from Aristotle to Kant and Hegel. Stability is interpreted as dialectical equilibrium, cocharacter closure corresponds to the distinction between potentiality and actuality, n -accessibility illuminates the limits of cognition, and reductive groups symbolize the relation between essence and appearance. In this way, the article argues that GIT not only provides formal tools for algebraic geometry but can also serve as a model for the philosophical structures of transformation, order, and knowledge.*

Keywords: *Geometric Invariant Theory; Cocharacter closure; Rational Hilbert–Mumford Theorem; Stability; n-accessibility; Reductive groups; Philosophy of mathematics*

Nhận bài: 21/08/2025 *Phản biện: 20/09/2025* *Duyệt đăng: 24/09/2025*

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lý thuyết bất biến hình học (Geometric Invariant Theory – GIT) do Mumford khởi xướng từ thập niên 1960 là công cụ quan trọng trong hình học đại số. GIT nghiên cứu quỹ đạo của các nhóm đại số reductive khi tác động lên đa tạp affine hoặc xạ ảnh, và đặc biệt là cách tính ổn định của một điểm được quyết định bởi quỹ đạo của nó. Trong hướng phát triển gần đây, Bate–Herpel–Martin–Röhrle [BHMR17] giới thiệu khái niệm bao đóng đối đặc trưng, phát triển phiên bản định lý Hilbert–Mumford hữu tỉ, và đưa ra khái niệm -accessible để đo mức độ tiếp cận giữa các quỹ đạo. Những công cụ này không chỉ làm rõ cấu trúc toán học của tác động nhóm mà còn gợi mở cách diễn giải rộng hơn. Trong triết học, các phạm trù như tiềm năng – hiện thực (Aristote), giới hạn của nhận thức (Kant), cân bằng biện chứng (Hegel), hay bản chất – hiện tượng luôn giữ vai trò trung tâm. Đáng chú ý, chúng có sự tương ứng bất ngờ với các khái niệm toán học nêu trên. Ứng dụng của nghiên cứu này có thể rất rộng, tùy cách triển khai. Chẳng hạn, trong kỹ thuật và trí tuệ nhân tạo, các mô hình học máy, robot hay hệ thống điều khiển có thể tận dụng nguyên tắc bất biến để tối ưu tính ổn định, đồng thời khai thác "tiềm năng" – tức khả năng thích nghi hoặc tái cấu trúc – mà không phá vỡ các ràng buộc cơ bản. Trong xã hội và triết học, lý thuyết này có thể giúp phân tích hệ thống xã hội: đâu là giá trị cốt lõi (bất biến) cần giữ, đâu là không gian phát triển (tiềm năng) cần khai mở. Điều này hữu ích trong giáo dục, quản trị, hay phát triển văn hóa, giúp giữ được bản sắc nhưng vẫn đổi mới. Bài viết này nhằm xây dựng cầu nối giữa GIT và triết học, tập trung vào bốn đối chiếu:(1) Ổn định ↔ Cân bằng biện chứng. (2) Bao đóng đối đặc trưng ↔ Tiềm năng và hiện thực. (3) n-accessible ↔ Giới hạn nhận thức. (4) Nhóm reductive ↔ Bản chất và hiện tượng.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Cơ sở toán học

2.1.1. Quỹ đạo và ổn định

Cho G là một nhóm đại số reductive tác động tuyến tính trên một không gian vectơ hữu hạn chiều V trên một trường k. Với $v \in V$, quỹ đạo của v là $G \cdot v = g \cdot v | g \in G$. Đây là tập hợp tất cả các vị trí của dưới tác động của G.

Một điểm v được gọi là ổn định nếu quỹ đạo $G \cdot v$ là tập đóng trong V. Khi đó, v không suy biến về một điểm khác ngoài quỹ đạo của nó. Ngược lại, nếu $\overline{G \cdot v}$ chứa điểm $v_0 \notin G \cdot v$, thì bất ổn định. Trong trường hợp này, tồn tại đối đặc trưng $\lambda : \mathbb{G}m \to G$ sao cho $\lim a \to 0 \lambda(a) \cdot v = v_0$.

Ví dụ: với tác động chuẩn của $SL_2(k)$ trên k^2, mọi vectơ khác đều có quỹ đạo là k^2,0, một tập đóng, nên ổn định; còn 0 thì bất ổn định. Ngược lại, với tác động của $SL_2(k)$ trên không gian ma trận 2x2 qua liên hợp $g \cdot M = gMg^{-1}$, quỹ đạo của $M = \text{diag}(1,0)$ không đóng vì bao đóng chứa ma trận . Đây là ví dụ điển hình của bất ổn định.

Nói cách khác, ổn định trong GIT không chỉ là trạng thái tĩnh mà là một cân bằng động: quỹ đạo đóng thì bền vững, còn quỹ đạo không đóng thì tất yếu suy biến về trạng thái giới hạn khác.

2.1.2. Định lý Hilbert–Mumford hữu tỉ

Định lý Hilbert–Mumford là kết quả trung tâm trong GIT, cho phép kiểm tra tính ổn định của một điểm thông qua các đối đặc trưng. Trong phiên bản cổ điển, nếu G là nhóm reductive tác động lên một đa tạp affine hay xạ ảnh, thì tính ổn định của $v \in V$ được xác định bằng cách xét giới hạn $\lim_{t \to 0} \lambda(a) \cdot v$ với λ chạy qua các đối đặc trưng của G[1] mở rộng kết quả này sang bối cảnh trường không đóng đại số, với các giới hạn hữu tỉ. Cụ thể:

Nếu mọi giới hạn $\lim_{a \to 0} \lambda(a) \cdot v$ đều nằm trong cùng một quỹ đạo $G \cdot v$, thì v ổn định. Nếu tồn tại một λ sao cho giới hạn nằm ngoài $G \cdot v$, thì v bất ổn định.

Điểm cốt lõi của định lý là: thay vì phải quan sát toàn bộ quỹ đạo toàn cục, ta chỉ cần xét các "dòng chảy" một chiều do đối đặc trưng tạo ra.

Để minh họa, hãy xét $G = SL_2(k)$ tác động lên không gian ma trận 2x2 bởi liên hợp $G = SL_2(k)$. Lấy $M = \text{diag}(1,0)$. Nếu chọn đối đặc trưng $\lambda(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ thì ta có:

$$\lambda(t).M = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ở đây, giới hạn khi $t \to 0$ vẫn là diag(1,0), nên chưa có gì thay đổi. Nhưng nếu xét tác động trên một ma trận tổng quát hơn, ví dụ $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ thì khi $\lambda(t)$ tác động, ta thu được $\lambda(t) \cdot M = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, và giới hạn khi $t \to 0$ là ma trận 0. Điều này cho thấy quỹ đạo của M không đóng: nó suy biến về 0 dưới tác động của λ.

Trực giác của định lý: để biết v ổn định hay không, chỉ cần xem nó phản ứng thế nào khi bị "kéo" dọc theo các đối đặc trưng. Nếu nó giữ nguyên, v ổn định; nếu nó suy biến về điểm khác, v bất ổn định.

2.1.3. Bao đóng đối đặc trưng

Trong bối cảnh định lý Hilbert–Mumford hữu tỉ, Bate–Herpel–Martin–Röhrle giới thiệu bao đóng đối đặc trưng. Với mỗi λ, nếu giới hạn $v_0 = \lim_{a \to 0} \lambda(a) \cdot v$ tồn tại trong V, thì v_0 được gọi là một giới hạn đối đặc trưng của v. Tập hợp các giới hạn đó tạo thành bao đóng đối đặc trưng $\overline{G \cdot v}^{\text{coc}}$.

Khái niệm này mô tả cấu trúc tiềm năng của quỹ đạo G.v: thay vì toàn bộ bao đóng Zariski có thể rất lớn, nó chỉ giữ lại các điểm đạt được qua suy biến một chiều, phản ánh những hướng suy biến cơ bản và có ý nghĩa hình học trực tiếp.

Ví dụ, xét $G = SL_2(k)$ tác động lên không gian ma trận 2x2 bởi liên hợp $g \cdot M = gMg^{-1}$. Lấy $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nếu chọn đối đặc trưng $\lambda(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$, ta tính được $\lambda(t) \cdot M = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Khi $t \to 0$, ta có giới hạn là ma trận 0. Như vậy 0 nằm trong bao đóng đối đặc trưng của M. Ở đây, thay vì phải xét toàn bộ bao đóng Zariski của quỹ đạo $SL_2(k) \cdot M$, ta chỉ cần một đối đặc trưng thích hợp để phát hiện ra điểm giới hạn 0.

Bao đóng đối đặc trưng là công cụ phân tích ổn định: nếu quỹ đạo không đóng, nó cho các điểm giới hạn mà quỹ đạo có thể suy biến tới; nếu quỹ đạo đóng, nó trùng với chính quỹ đạo. Nói cách khác, nó đo "mức độ bất ổn định" của một điểm bằng cách liệt kê các trạng thái tiềm ẩn mà điểm đó có thể đạt đến qua đối đặc trưng. Trực giác:

đây giống như "bản đồ các khả năng" cho mỗi điểm, phản ánh sự chuyển hóa từ tiềm năng sang hiện thực.

2.1.4. Tính n-accessible

Trong [1,tr 10] có trình bày khái niệm n-accessible để mô tả mức độ tiếp cận giữa các quỹ đạo. Không phải mọi quỹ đạo đều đạt tới bằng một bước giới hạn theo đối đặc trưng; đôi khi cần nhiều bước liên tiếp.

Cụ thể, một quỹ đạo G.v là n-accessible nếu tồn tại một dãy đối đặc trưng $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ và các điểm $v_1,\ldots,v_n$ sao cho mỗi v_i là giới hạn $\lim_{a\to 0}\lambda_i(a)\cdot v_{i-1}$, và cuối cùng v_n nằm trong quỹ đạo cần xét. Trường hợp n=1 gọi là 1-accessible, còn n >1 thì phải qua các tầng trung gian. Có những quỹ đạo hoàn toàn không n-accessible, tức không thể đạt tới bằng hữu hạn bước.

Một ví dụ đơn giản minh họa: xét tác động của $G = SL_2(k)$ lên không gian ma trận 2x2 bởi liên hợp. Lấy ma trận cấp 2, ví dụ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quỹ đạo của M bao gồm tất cả ma trận khả nghịch (cùng định thức). Nếu ta chọn một đối đặc trưng $\lambda(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ và tác động lên một ma trận khác cùng quỹ đạo, ta có thể thu được giới hạn là một ma trận hạng 1. Từ đó, bằng một đối đặc trưng khác, ma trận hạng 1 có thể suy biến về ma trận 0. Như vậy, 0 là 2-accessible từ một ma trận hạng 2.

Ý nghĩa của n-accessible là nó phân tầng sự tiếp cận quỹ đạo: có điểm đến ngay sau một bước, có điểm cần nhiều bước, và có điểm hoàn toàn ngoài tầm với. Khái niệm này vừa làm phong phú cấu trúc hình học, vừa gợi mở triết học: không phải trạng thái nào cũng đạt ngay được, có trạng thái chỉ hình thành sau nhiều chuyển hóa trung gian, và có trạng thái nằm ngoài khả năng tiếp cận.

2.2. Phân tích triết học

Các khái niệm trong Mục 2 – quỹ đạo và ổn định, định lý Hilbert–Mumford hữu tỉ, bao đóng đối đặc trưng và tính -accessible – vốn được xây dựng để giải quyết vấn đề kỹ thuật trong GIT. Nhưng nhìn kỹ, chúng cũng gợi lại nhiều phạm trù triết học đã được bàn từ lâu: ổn định – bất ổn định, tiềm năng – hiện thực, giới hạn của nhận thức, bản chất – hiện tượng.

Sự tương ứng này cho thấy toán học và triết học có thể soi chiếu lẫn nhau. Toán học cung cấp mô hình hình thức cho những khái niệm triết học, còn triết học giúp đọc toán học như một tư duy về vận động và cấu trúc tồn tại. Do đó, trong phần này, tác giả đối chiếu từng khái niệm toán học với một phạm trù triết học: ổn định với cân bằng biện chứng, bao đóng đối đặc trưng với tiềm năng và hiện thực, n-accessible với giới hạn nhận thức, và reductive với bản chất và hiện tượng.

2.2.1. Ổn định ↔ Cân bằng biện chứng

Trong lý thuyết bất biến hình học, với một nhóm reductive G tác động lên không gian vectơ V, quỹ đạo $G\cdot v$ của $v\in V$ được gọi là ổn định nếu nó đóng trong V . Khi đó v không suy biến về quỹ đạo khác. Ngược lại, nếu quỹ đạo không đóng thì tồn tại một đối đặc trưng λ sao cho $\lim_{a\to 0}\lambda(a)\cdot v = v_0$ với $v_0 \notin G\cdot v$. Khi ấy v bất ổn định, vì nó bị đẩy vào một trạng thái khác trong bao đóng.

Trong triết học biện chứng, Hegel cho rằng tồn tại luôn chứa mâu thuẫn nội tại. Hình thái bất ổn định là hình thái còn mâu thuẫn nên tất yếu phải biến đổi; hình thái ổn định là nơi mâu thuẫn đã được giải quyết. Quá trình này được Hegel gọi là Aufhebung (phủ định nhưng đồng thời bảo tồn và nâng cao), và sau này Marx diễn đạt thành quy luật phủ định của phủ định.

So sánh hai bên, ta có sự tương ứng: quỹ đạo không đóng chính là hình thái bất ổn định, còn quá trình tiến tới giới hạn trong bao đóng đối đặc trưng giống với quá trình phủ định. Quỹ đạo đóng là trạng thái ổn định biện chứng, nơi mâu thuẫn được hóa giải.

2.2.2. Bao đóng đối đặc trưng ↔ Tiềm năng và Hiện thực

Bao đóng đối đặc trưng được định nghĩa như sau: với $v\in V$ và một đối đặc trưng λ , nếu giới hạn $v_0 = \lim_{a\to 0}\lambda(a)\cdot v$ tồn tại thì v_0 là một giới hạn đối đặc trưng của v. Tập hợp tất cả các giới hạn khi λ chạy qua mọi đối đặc trưng tạo thành bao đóng đối đặc trưng của v. Nó mô tả những trạng thái mà có thể tiến tới thông qua sự suy biến một chiều [1, tr.3].

Khái niệm này gợi đến tư tưởng của Aristote về Dynamis (tiềm năng) và energeia (hiện thực). Một thực thể không chỉ tồn tại trong hiện trạng, mà luôn mang trong nó khả thể để triển khai thành hình thái khác.

Trong toán học, v là hiện thực tại một thời điểm, còn bao đóng đối đặc trưng cho thấy toàn bộ "không gian tiềm năng" của v. Mỗi giới hạn thu được từ một λ chính là sự hiện thực hóa một khả thể vốn nằm trong cấu trúc của v.

Ví dụ: với tác động chuẩn của $SL_2(k)$ trên k^2,

mọi $v \neq 0$ có quỹ đạo đóng, nên bao đóng đối đặc trưng chỉ gồm chính quỹ đạo đó – tức là v đã hiện thực hết khả thể. Ngược lại, trong tác động của $SL_2(k)$ trên không gian ma trận 2x2 , một ma trận hạng 2 có bao đóng đối đặc trưng chứa cả ma trận hạng 1 và cuối cùng là ma trận 0. Điều này cho thấy trạng thái ban đầu đã tiềm ẩn khả năng suy biến, và các giới hạn đối đặc trưng lần lượt hiện thực hóa những khả thể ấy.

Do đó, bao đóng đối đặc trưng không chỉ là công cụ kỹ thuật trong GIT, mà còn là một mô hình cho quan niệm Aristote: tồn tại vừa là cái đang hiện hữu, vừa chứa trong nó những khả thể sẽ được hiện thực hóa qua vận động.

2.2.3. Khái niệm n-accessible ↔ Giới hạn của nhận thức

Ngoài bao đóng đối đặc trưng, một khái niệm quan trọng khác là n-accessible. Một quỹ đạo được gọi là n-accessible nếu có thể đi từ một quỹ đạo khác đến $G \cdot v$ qua n lần giới hạn liên tiếp theo các đối đặc trưng. Trường hợp n=1 nghĩa là chỉ cần một bước; với n>0 thì cần qua nhiều tầng trung gian. Có quỹ đạo hoàn toàn không n-accessible, tức là không thể tiếp cận bằng hữu hạn bước.

Khái niệm này gợi đến tư tưởng của Kant trong Phê phán lý tính thuần túy: lý trí con người có giới hạn, không phải cái gì tồn tại cũng khả tri. "Vật tự thân" (das Ding an sich) nằm ngoài phạm vi kinh nghiệm, lý trí chỉ có thể chạm đến hiện tượng chứ không thể đạt bản chất tối hậu.

Tương ứng trong toán học, một quỹ đạo n-accessible giống như một đối tượng khả tri: có thể tiếp cận nó qua chuỗi hữu hạn bước. Ngược lại, những quỹ đạo không n-accessible phản ánh giới hạn nhận thức: dù có cố gắng, vẫn không thể đạt tới trong khuôn khổ hiện có.

Ví dụ: xét tác động của $SL_2(k)$ trên không gian ma trận 2x2 . Một ma trận hạng 2 có thể suy biến thành hạng 1 qua một giới hạn đối đặc trưng, rồi từ hạng 1 suy biến về 0 qua một giới hạn khác. Như vậy, 0 là 2-accessible từ ma trận hạng 2. Ngược lại, có những quỹ đạo không thể đạt tới bằng bất kỳ số bước hữu hạn nào, minh họa cho ranh giới khả tri trong không gian quỹ đạo, tương tự giới hạn nhận thức ở Kant.

Như vậy, n-accessible có thể được hiểu như một ẩn dụ triết học: tồn tại không đồng nghĩa với khả tri, và việc tiếp cận một đối tượng luôn có giới hạn, độ dài và mức độ phức tạp nhất định.

2.2.4. Nhóm reductive : Bản chất và hiện tượng

Một giả thiết cơ bản để GIT vận hành tốt là nhóm tác động G phải reductive. Khi đó, đại số các bất biến $k[V]^G$ là hữu hạn sinh và các quỹ đạo có thể phân tích bằng công cụ như định lý Hilbert–Mumford. Nếu G chứa phần tử lũy đơn (unipotent), quỹ đạo thường phức tạp và bất ổn định, khiến lý thuyết mất đi trật tự mong muốn.

Nhóm reductive có đặc trưng: mọi biểu diễn hữu hạn chiều phân rã thành tổng trực tiếp các biểu diễn bất khả quy. Điều này cho thấy cấu trúc trong suốt và có thể phân tích được. Ví dụ: $GL_n(k)$ hay là $SL_n(k)$ reductive, còn nhóm unipotent như các ma trận tam giác trên với trên đường chéo chính thì không.

Trong triết học Hegel, bản chất (Wesen) là cái bền vững, còn hiện tượng (Erscheinung) là cái xuất hiện biến động. Hiểu thế giới là đi từ hiện tượng đến bản chất. So sánh, nhóm reductive giống bản chất: loại bỏ phần unipotent bất ổn, giữ lại cấu trúc nền vững chắc. Nhóm có phần unipotent lớn thì chỉ cho ta một lớp hiện tượng hỗn độn, khó nắm bắt.

Ví dụ: $SL_2(k)$ tác động trên k^2 sinh ra các quỹ đạo rõ ràng: mọi vectơ khác 0 đều nằm trên quỹ đạo đóng, ổn định. Ngược lại, nhóm $U = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in k$ unipotent tác động trên k^2 tạo quỹ đạo $(x + ay, y) : a \in k$, vốn là một đường thẳng không đóng, bất ổn định.

Do đó, giả thiết reductive không chỉ là kỹ thuật toán học, mà còn là ẩn dụ triết học: từ hiện tượng biến động đi đến bản chất ổn định, nơi ta mới có thể xây dựng được một lý thuyết bất biến toàn diện.

2.2.5. Từ ổn định đến bản chất – Một đối thoại Toán học và Triết học

Một loạt khái niệm toán học trong GIT cho thấy sự cộng hưởng rõ rệt với triết học. Trước hết, ổn định được hiểu qua quỹ đạo đóng tương ứng với cân bằng biện chứng của Hegel: điểm bất ổn định tất yếu suy biến thành trạng thái khác, phản ánh "phủ định của phủ định". Tiếp đến, bao đóng đối đặc trưng minh họa phân biệt dynamis (tiềm năng) và energeia (hiện thực) của Aristote: một điểm là hiện thực tức thời, còn bao đóng đối đặc trưng phác họa toàn bộ khả thể tiềm ẩn của nó.

Khái niệm n-accessible gợi đến giới hạn nhận thức của Kant: có quỹ đạo có thể đạt tới bằng hữu hạn bước (tương tự cái khả tri), nhưng cũng có quỹ đạo không thể tiếp cận (tương tự vật tự thân).

Cuối cùng, giả thiết reductive phản ánh phân biệt bản chất – hiện tượng: nhóm reductive loại bỏ yếu tố bất ổn unipotent, giữ lại cấu trúc bền vững, giống như việc đi từ hiện tượng biến động đến bản chất nền tảng.

Tổng hợp lại, bốn khái niệm toán học — ổn định, bao đóng đối đặc trưng, n-accessible, và reductive — tương ứng với bốn phạm trù triết học cổ điển: cân bằng biện chứng, tiềm năng và hiện thực, giới hạn nhận thức, bản chất và hiện tượng. Điều này cho thấy GIT không chỉ là công cụ kỹ thuật, mà còn có thể được đọc như một mô hình cấu trúc cho triết học về vận động và trật tự.

2.3. Một ngôn ngữ chung giữa Toán học và Triết học

Các khái niệm trung tâm của GIT có thể đặt song hành với những phạm trù triết học. Quỹ đạo đóng tương ứng với ổn định biện chứng, quỹ đạo không đóng phản ánh bất ổn định và phủ định. Bao đóng đối đặc trưng là mô hình cho phân biệt Aristote giữa tiềm năng và hiện thực. Khái niệm n-accessible gợi lại giới hạn nhận thức của Kant: có cái khả tri, có cái nằm ngoài tầm với. Giả thiết reductive biểu thị sự phân biệt Hegel giữa bản chất và hiện tượng, khi yếu tố unipotent bị loại bỏ để giữ lại cấu trúc bền vững.

Như vậy, ổn định, bao đóng đối đặc trưng, n-accessible và reductive không chỉ là công cụ toán học, mà còn soi chiếu những phạm trù triết học, cùng góp phần mô tả cấu trúc và vận động của tồn tại.

III. KẾT LUẬN

Các khái niệm trung tâm của GIT — ổn định, bao đóng đối đặc trưng, n-accessible và reductive — không chỉ là công cụ toán học mà còn phản ánh những phạm trù triết học như cân bằng biện chứng, tiềm năng và hiện thực, giới hạn nhận thức, bản chất và hiện tượng. Toán học đưa ra hình thức chính xác, trong khi triết học cung cấp khung khái niệm rộng hơn, tạo nên sự cộng hưởng hiếm có.

Triển vọng của hướng kết nối này nằm ở khả năng xây dựng một "triết học của ổn định", nơi các công cụ GIT mô hình hóa quá trình biến đổi từ bất ổn định đến cân bằng. Ngược lại, triết học có thể gợi mở cho toán học những câu hỏi mới: hình thức hóa phủ định của phủ định qua n-accessible, hay phân tích sâu hơn về tiềm năng bằng bao đóng đối đặc trưng. Qua đó, toán học và triết học không chỉ song hành mà thực sự đối thoại, cùng góp phần vào một dự án chung: mô tả trật tự và vận động của tồn tại bằng cả khái niệm và công cụ hình thức.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. M. Bate, S. Herpel, B. Martin, G. Röhrle (2017). *Cocharacter-closure and the rational Hilbert–Mumford Theorem.* Mathematische Zeitschrift, 285, 445–465.

[2]. D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan (1994). *Geometric Invariant Theory (3rd ed.).* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag.

[3]. J.-P. Serre (1996). *Linear Representations of Finite Groups.* Springer.

[4]. T.A. Springer (1998). *Linear Algebraic Groups (2nd ed.).* Birkhäuser.

[5]. Aristotle. Metaphysics. (Bản dịch tiếng Anh: W.D. Ross, 1924). *Clarendon Press.*

[6]. Aristotle. Physics. (Bản dịch tiếng Anh: R.P. Hardie & R.K. Gaye, 1930). *Clarendon Press.*

[7]. Immanuel Kant (1781/1787). *Critique of Pure Reason.* (Bản dịch tiếng Anh: P. Guyer & A.W. Wood, Cambridge University Press, 1998).

[8]. G.W.F. Hegel (1812–1816). *Science of Logic*. (Bản dịch tiếng Anh: A.V. Miller, Humanities Press, 1969).

[9]. G.W.F. Hegel (1830). *Encyclopaedia of the Philosophical Sciences.* (Bản dịch tiếng Anh: T.F. Geraets, W.A. Suchting, H.S. Harris, Hackett, 1991).